الفصل الخامس: العلاقات والدوال النسبية

العبارة النسبية

المقصود بها	النسبة بين كثيرتي حدود
أمثلة توضيحية	$\frac{x-8}{x^2+5x+6}$, $\frac{6c}{5d-8a}$, $\frac{1700}{d-33}$
طرق تبسيطها	(1) نحلل كلاً من البسط والمقام إلى العوامل. (2) نقسم كلاً من البسط والمقام على العامل المشترك الأكبر بينهما « GCF ».
مثال توضيحي	$\frac{x-1}{x^2-6x+5} = \frac{\cancel{x-1}}{(x-5)\cancel{(x-1)}} = \frac{1}{x-5}$
تنبيه	العبارة النسبية تكون غير معرّفة عند القيم التي تجعل المقام مساويًا للصفر
مثال توضيحي	العبارة $\frac{1}{x-5}$ تكون غير معرّفة عند $x = 5$

ضرب العبارات النسبية

التعبير الرمزي لضرب عبارتين نسبيتين	إذا كانت $\frac{c}{d}$, $\frac{a}{b}$ عبارتين نسبيتين؛ حيث $b \neq 0$, $d \neq 0$ فإن .. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
طريقته	عند ضرب عبارتين نسبيتين (1) نحلل كلاً من البسط والمقام إلى عوامل. (2) نختصر العوامل المشتركة بين البسط والمقام.
مثال توضيحي	$\frac{3x}{2y} \cdot \frac{4y^2}{x^2} = \frac{3 \cdot x \cdot 2 \cdot 2 \cdot y \cdot y}{2 \cdot y \cdot x \cdot x} = \frac{3 \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{y} \cdot y}{\cancel{2} \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{x} \cdot x} = \frac{6y}{x}$

قسمة العبارات النسبية

طريقتها	عند قسمة عبارة نسبية على أخرى نضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه
التوضيح بالرموز	إذا كانت $\frac{c}{d}$, $\frac{a}{b}$ عبارتين نسبيتين حيث $b \neq 0$, $d \neq 0$, $c \neq 0$ فإن .. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$
مثال توضيحي	$\frac{3z^2}{2y} \div \frac{z}{4x} = \frac{3z^2}{2y} \cdot \frac{4x}{z} = \frac{3 \cdot \cancel{z} \cdot z \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot x}{\cancel{2} \cdot y \cdot \cancel{z}} = \frac{6xz}{y}$
الكسر المركب	• المقصود به: عبارة نسبية بسطها ومقامها أو أحدهما عبارة نسبية أيضًا. • أمثلة توضيحية: $\frac{\frac{4}{x}+6}{\frac{12}{a}-3}$, $\frac{\frac{x-3}{8}}{\frac{x-2}{x+4}}$, $\frac{\frac{c}{6}}{5d}$.

فائدة	لتبسيط الكسر المركب يُكتب أولاً على صورة قسمة عبارتين
مثال توضيحي	$\dfrac{\frac{4}{x}+6}{\frac{12}{a}-3} = \left(\frac{4}{x}+6\right)\div\left(\frac{12}{a}-3\right)$

جمع العبارات النسبية

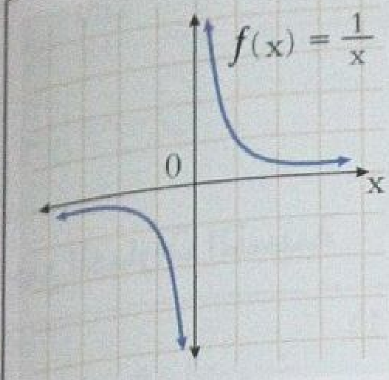
خطوات جمع العبارات النسبية	(1) نُوجد المضاعف المشترك الأصغر « LCM » للمقامات. (2) نُعيد كتابة العبارات بحيث يكون مقاماتها هي LCM . (3) نجمع البسوط لنفس المقام ثم نُبسط الناتج إن أمكن.
التوضيح بالرموز	إذا كانت $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ عبارتين نسبيتين؛ حيث $b \neq 0$, $d \neq 0$ فإن .. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$
خطوات إيجاد LCM لعددين أو لكثيرتي حدود	(1) نُحلل كلاً منهما إلى عوامل. (2) نضرب كل العوامل التي لها أكبر أس.
مثال توضيحي	لإيجاد LCM بين $12a^2b$, $15abc$, $8b^3c^4$ نتبع التالي: **أولاً**: نُحلل كلاً منها إلى عوامل .. $12a^2b = 3\cdot2^2\cdot a^2\cdot b$, $15abc = 3\cdot5\cdot a\cdot b\cdot c$, $8b^3c^4 = 2^3\cdot b^3\cdot c^4$ **ثانيًا**: نوجد LCM بضرب العوامل التي لها أكبر أس .. $LCM = 3\cdot2^3\cdot5\cdot a^2\cdot b^3\cdot c^4 = 120a^2b^3c^4$

طرح العبارات النسبية

خطوات طرح العبارات النسبية	(1) نُوجد المضاعف المشترك الأصغر « LCM » للمقامات. (2) نُعيد كتابة العبارات بحيث يكون مقاماتها هي LCM . (3) نطرح البسوط لنفس المقام ثم نُبسط الناتج إن أمكن.
التوضيح بالرموز	إذا كانت $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ عبارتين نسبيتين؛ حيث $b \neq 0$, $d \neq 0$ فإن .. $\frac{a}{b}-\frac{c}{d} = \frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bd} = \frac{ad-bc}{bd}$

الدالة الرئيسة « الأم » لدوال المقلوب

قاعدتها	$x \neq 0$, $f(x) = \frac{1}{x}$



تمثيلها البياني	قطع زائد
المجال والمدى	كل الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر
خطا التقارب	$x = 0$ خط تقاربي رأسي ، $y = 0$ خط تقاربي أفقي
المقطعان	لا يوجد « لا تتقاطع مع محوري الإحداثيات »
تنبيه	الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ تكون غير معرّفة عند $x = 0$
مجال دالة المقلوب	مجموعة القيم التي تكون عندها الدالة معرّفة
مثال توضيحي	في الدالة $f(x) = \frac{2}{x-5}$ نجد أنه عند $x = 5$ فإن .. • $f(5) = \frac{2}{5-5} = \frac{2}{0} \Leftarrow f(x)$ غير معرّفة عند $x = 5$. • مجال $f(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا 5 .

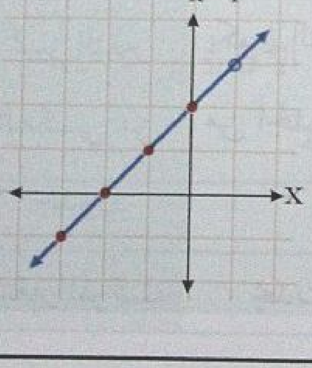
تحويلات التمثيل البياني لدالة المقلوب

المقصود به	تحويل للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = \frac{1}{x}$ مع تحديد خطي التقارب الجديدين	
تحويلات التمثيل البياني لدالة المقلوب	صورتها القياسية	$f(x) = \frac{a}{x-h} + k$
	الإزاحة الأفقية	• إزاحة بمقدار $\|h\|$ وحدة يمينًا، إذا كانت h موجبة. • إزاحة بمقدار $\|h\|$ وحدة يسارًا، إذا كانت h سالبة. • خط تقارب رأسي عند $x = h$.
	الإزاحة الرأسية	• إزاحة بمقدار $\|k\|$ وحدة لأعلى، إذا كانت k موجبة. • إزاحة بمقدار $\|k\|$ وحدة لأسفل، إذا كانت k سالبة. • خط تقارب أفقي عند $y = k$.
	الشكل والاتجاه	• إذا كانت $a < 0$ فإن التمثيل البياني ينعكس حول المحور x . • إذا كانت $\|a\| > 1$ فإن التمثيل البياني يتسع رأسيًا. • إذا كانت $0 < \|a\| < 1$ فإن التمثيل البياني يضيق رأسيًا.
فائدة	تمتد خطوط التقارب لدالة المقلوب مع التمثيل البياني للدالة وتتقاطع عند النقطة (h,k)	
مثال توضيحي	في الدالة $f(x) = \frac{7}{x-4} + 2$ .. • $a = 7$, $k = 2$, $h = 4$. • $f(x)$ لها خط تقارب رأسي عند $x = 4$ ، وخط تقارب أفقي عند $y = 2$. • خطا التقارب للدالة $f(x)$ يتقاطعان عند النقطة $(4,2)$.	مقارنة الدالة المعطاة بالصورة القياسية $f(x) = \frac{7}{x-4} + 2$ $f(x) = \frac{a}{x-h} + k$

الدالة النسبية

المقصود بها	دالة على الصورة $f(x) = \dfrac{a(x)}{b(x)}$ حيث $a(x)$, $b(x)$ دالتان كثيرتا حدود و $b(x) \neq 0$
أمثلة توضيحية	$f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$, $f(x) = \dfrac{3}{x^2-1}$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$
أصفار الدالة النسبية	• **المقصود بها:** أصفار الدالة $f(x) = \dfrac{a(x)}{b(x)}$ هي كل قيم x التي تجعل $a(x) = 0$. • **مثال توضيحي:** الدالة $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+3}$ لها صفر عند: $x = 2 \Leftarrow x-2 = 0$
خطوط التقارب الرأسية والأفقية للتمثيل البياني للدوال النسبية	إذا كانت $f(x) = \dfrac{a(x)}{b(x)}$ ؛ حيث $a(x)$, $b(x)$ دالتان كثيرتا حدود لا يوجد بينهما عوامل مشتركة غير الواحد و $b(x) \neq 0$ فإنه .. • يوجد للدالة $f(x)$ خط تقارب رأسي عند $b(x) = 0$. • يوجد للدالة $f(x)$ خط تقارب أفقي واحد على الأكثر. • إذا كانت درجة $a(x)$ أكبر من درجة $b(x)$ فلا يوجد خط تقارب أفقي. • إذا كانت درجة $a(x)$ أقل من درجة $b(x)$ فإن خط التقارب الأفقي هو المستقيم $y = 0$. • إذا كانت درجة $a(x)$ تساوي درجة $b(x)$ فإن خط التقارب الأفقي هو المستقيم $y = \dfrac{\text{المعامل الرئيس لـ } a(x)}{\text{المعامل الرئيس لـ } b(x)}$.
فائدة	لتمثيل الدالة النسبية بيانيًا يجب تحديد الأصفار وخطوط التقارب

نقطة الانفصال

المقصود بها	نقطة يحدث عندها فجوة في التمثيل البياني لبعض الدوال النسبية	
التعبير اللفظي	إذا كانت $f(x) = \dfrac{a(x)}{b(x)}$ ؛ حيث $b(x) \neq 0$ وكان $x-c$ عاملاً مشتركًا بين $a(x)$ و $b(x)$ فإنه يوجد نقطة انفصال عند $x = c$	
مثال توضيحي	إذا كانت $f(x) = \dfrac{(x+2)(x-1)}{(x-1)} = x-2$ فإنه عند $x = 1$ نقطة انفصال كما هو في الشكل المجاور	$f(x) = \dfrac{(x+2)(x-1)}{x-1}$ 
فائدة	وجود عامل مشترك بين بسط ومقام دالة نسبية يدل على وجود فجوة في التمثيل البياني للدالة	
تنبيه	إذا كان للدالة $f(x)$ نقطة انفصال عند النقطة $x = c$ فإنها غير معرّفة عند تلك النقطة	

التغير الطردي والتغير المشترك

التغير الطردي	• **التعبير اللفظي**: تتغير y طرديًا مع x إذا وُجد عدد $k \neq 0$ بحيث أن $y = kx$ ؛ ويُسمى العدد k ثابت التغير. • **مثال توضيحي**: إذا كانت $y = 7x$ فإن التغير طردي وثابت التغير يساوي 7 .
فائدة	إذا كانت y تتغير طرديًا مع x وعُلمت بعض القيم فإنه يمكن استخدام **التناسب الطردي** $\dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y_2}{x_2}$ لإيجاد القيم الأخرى
تمييز التغير الطردي من جدول	التغير بين x و y يكون **طرديًا** إذا كان حاصل القسمة $\dfrac{x}{y}$ مقدارًا ثابتًا دائمًا. من الجدول المجاور فإن .. $\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline x & 2 & 3 \\ \hline y & 6 & 9 \\ \hline\end{array}$ $\dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$ مقدار ثابت
التغير المشترك	• **التعبير اللفظي**: تتغير y تغيُرًا مشتركًا مع x و z إذا وُجد عدد $k \neq 0$ بحيث أن $y = kxz$ ؛ ويُسمى العدد k ثابت التغير. • **مثال توضيحي**: إذا كانت $y = 5xz$ فإن التغير مشترك وثابت التغير يساوي 5 .
فائدة	إذا كانت y تتغير تغيُرًا مشتركًا مع x و z وعُلمت بعض القيم فإنه يمكن استخدام التناسب المشترك $\dfrac{y_1}{x_1 z_1} = \dfrac{y_2}{x_2 z_2}$ لإيجاد القيم الأخرى

التغير العكسي والتغير المركب

التغير العكسي	• **التعبير اللفظي**: تتغير y عكسيًا مع x إذا وُجد عدد $k \neq 0$ بحيث أن $xy = k$ أو $y = \dfrac{k}{x}$ ؛ حيث $x \neq 0$ و $y \neq 0$. • **مثال توضيحي**: إذا كانت $xy = 3$ فإن: التغير عكسي و $x = \dfrac{3}{y}$ وثابت التغير يساوي 3 .
فائدة	إذا كانت y تتغير عكسيًا مع x وعُلمت بعض القيم فإنه يمكن استخدام .. $x_1y_1 = x_2y_2$ أو **التناسب العكسي** $\dfrac{x_1}{y_2} = \dfrac{x_2}{y_1}$ لإيجاد القيم الأخرى
تمييز التغير العكسي من جدول	يكون التغير بين x و y **عكسيًا** إذا كان حاصل الضرب xy مقدارًا ثابتًا دائمًا. من الجدول المجاور فإن .. $\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline x & 2 & 3 \\ \hline y & 12 & 8 \\ \hline\end{array}$ $xy = 2(12) = 3(8) = 24$ مقدار ثابت
التغير المركب	يحدث عندما تتغير كمية ما طرديًا أو عكسيًا أو كليهما معًا مع كميتين أخريين أو أكثر

فائدتان	• إذا كانت y تتغير طرديًا مع x وعكسيًا مع z وعُلمت بعض القيم فإنه يمكن استخدام التناسب المركب $\frac{y_1 z_1}{x_1} = \frac{y_2 z_2}{x_2}$ لإيجاد القيم الأخرى. • في التناسب المركب تظهر الكميات التي تتغير طرديًا في المقام، أما الكميات التي تتغير عكسيًا فتظهر في البسط.

حل المعادلات النسبية

المعادلة النسبية	• المقصود بها: معادلة تحوي عبارة نسبية أو أكثر. • مثال توضيحي: $\frac{8}{x-5} - \frac{9}{x+4} = \frac{x}{2}$. • حلها: القيم التي تحقق المعادلة.
فائدة	عند حل المعادلة النسبية يجب التخلص من الكسور وذلك بضرب طرفي المعادلة في LCM « المضاعف المشترك الأصغر » للمقامات
الحل الدخيل	الحل الذي لا يحقق المعادلة الأصلية
تنبيهان	• يجب التحقق من صحة الحلول الناتجة بالتعويض في المعادلة النسبية. • يجب استبعاد الحلول الدخيلة إن وُجدت.

حل المتباينات النسبية

المتباينة النسبية	• المقصود بها: متباينة تحوي عبارة نسبية أو أكثر. • مثال توضيحي: $\frac{8}{x-5} - \frac{9}{x+4} < \frac{x}{2}$. • حلها: فترات تحقق المتباينة.
المعادلة المرتبطة	• المقصود بها: المعادلة الناتجة بعد وضع علامة « = » بدلاً من علامة التباين في المتباينة. • مثال توضيحي: المعادلة المرتبطة بالمتباينة $\frac{4}{3x} + \frac{7}{x} < \frac{5}{9}$ هي $\frac{4}{3x} + \frac{7}{x} = \frac{5}{9}$.
خطوات حل المتباينة النسبية	(1) نُحدد القيم المستثناة وهي القيم التي تجعل المقام مساويًا للصفر. (2) نحل المعادلة المرتبطة. (3) نستعمل القيم التي حصلنا عليها في الخطوتين السابقتين لتقسيم خط الأعداد إلى فترات. (4) نختبر قيمة من كل فترة لتحديد الفترات التي تحوي قيمًا تحقق المتباينة.

الفصل السادس: المتتابعات والمتسلسلات

المتتابعة الحسابية

المتتابعة	• المقصود بها: سلسلة من الأعداد مرتبة بطريقة معينة. • مثال توضيحي: ... , 8 , 6 , 4 , 2 .
المتتابعة كدالة	دالة مجالها مجموعة من الأعداد الطبيعية ومداها مجموعة من الأعداد الحقيقية
المتتابعة الحسابية	• كل حد فيها يُحدَّد بإضافة عدد ثابت إلى الحد الذي يسبقه .. مقدار الحد = الحد الذي يسبقه+عدد ثابت • العدد الثابت يسمى أساس المتتابعة.
مثال	$3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+3} 9 \xrightarrow{+3} 12 \xrightarrow{+3} 15$ • **المجال « ترتيب الحدود »** : $1 , 2 , 3 , 4 , \dots n$. • **المدى « حدود المتتابعة »** : $a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n$.
تنبيه	يمكن للمتتابعة أن تكون منتهية « لها عدد محدود »، أو غير منتهية « تستمر بلا نهاية »
مثالان	**متتابعة منتهية** $3 , 6 , 9 , 12 , 15$ **متتابعة غير منتهية** $3 , 6 , 9 , 12 , 15 , \dots$

المتتابعة الهندسية

شرطها	مقدار الحد = الحد الذي يسبقه×عدد ثابت غير الصفر العدد الثابت يسمى أساس المتتابعة.
مثال توضيحي	العدد 4 يسمى أساس المتتابعة الهندسية ونحصل عليه بقسمة أي حد على الحد الذي يسبقه مباشرةً $\frac{1}{16} \xrightarrow{\times 4} \frac{1}{4} \xrightarrow{\times 4} 1 \xrightarrow{\times 4} 4 \xrightarrow{\times 4} 16$
فائدة	في المتتابعة الهندسية تكون النسبة بين كل حد والحد السابق له مباشرة نسبة ثابتة

الحد النوني للمتتابعة الحسابية

الصيغة الجبرية لإيجاد الحد النوني	المتتابعة الحسابية: $a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n$ فيها .. $$a_n = a_1 + (n-1)d$$	a_n الحد النوني a_1 الحد الأول للمتابعة n عدد طبيعي d أساس المتتابعة

مثال توضيحي	إيجاد الحد الثاني عشر في المتابعة الحسابية ... , 30 , 23 , 16 , 9 .. $n=12 \quad , \quad d=16-9=7 \quad , \quad a_1=9$ $\therefore \quad a_{12}=a_1+(12-1)d = 9+(12-1)(7) = 9+11(7) = 9+77 = 88$

الأوساط الحسابية

المقصود بها	الأوساط الحسابية هي الحدود الواقعة بين حدين غير متتاليين في متابعة حسابية
فائدتان	• يمكن استعمال أساس المتابعة الحسابية لإيجاد الأوساط الحسابية. • إذا علمنا عدد الأوساط الحسابية فيمكننا الحصول على عدد حدود المتابعة الحسابية .. عدد الحدود = عدد الأوساط + ٢

المجموع الجزئي في متسلسلة حسابية

المتسلسلة الحسابية	مجموع متابعة حسابية		
فائدة	يمكن الحصول على المتسلسلة بوضع إشارة الجمع بين حدود المتابعة		
المجموع الجزئي في متسلسلة حسابية	المقصود به	ناتج جمع الحدود n الأولى من المتسلسلة الحسابية	S_n المجموع الجزئي n عدد الحدود a_1 الحد الأول a_n الحد الأخير d الأساس
	صيغته العامة	$S_n = n\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)$	
	صيغته البديلة	$S_n = \frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$	
تنبيهان	• الصيغة العامة للمجموع الجزئي تُستخدم إذا عُلم الحد الأول a_1 والحد الأخير a_n . • الصيغة البديلة للمجموع الجزئي تُستخدم إذا عُلم الحد الأول a_1 والأساس d .		
مجموع المتسلسلة الحسابية	يمكن كتابة مجموع المتسلسلة بصورة مختصرة باستعمال رمز المجموع $\sum$ ويُقرأ سيجما $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ آخر قيمة لـ k ← n أول قيمة لـ k ← k = 1 صيغة حدود المتسلسلة ← f(k)		
مثال توضيحي	$\sum_{k=1}^{7}(2k+1) = [2(1)+1]+[2(2)+1]+\ldots+[2(7)+1] = 3+5+\ldots+15$		
تنبيه	للحصول على عدد حدود المتسلسلة .. نطرح أول قيمة لـ k من آخر قيمة لـ k ثم نضيف ١		
مثال توضيحي	للمتسلسلة $\sum_{k=3}^{7}(2k+1)(k+1)$ يكون .. عدد الحدود $= 7-3+1 = 5$		

صيغته الجبرية	المتتابعة الهندسية $a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n$ فيها .. $$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$	a_n الحد النوني a_1 الحد الأول للمتابعة r أساس المتتابعة n عدد طبيعي
مثال توضيحي	لإيجاد الحد السادس في المتتابعة الهندسية .. $2 , 6 , 18 , \dots$ .. $$n = 6 \;,\; r = \frac{6}{2} = 3 \;,\; a_1 = 2$$ $$a_6 = a_1 \cdot r^{6-1} = 2(3)^5 = 486$$	

الأوساط الهندسية

المقصود بها	الحدود الواقعة بين حدين غير متتاليين في متتابعة هندسية
مثال توضيحي	في المتتابعة الهندسية .. $3 , 6 , 12 , 24 , \dots$ نجد أن .. العددان $6 , 12$ وسطان هندسيان بين العددين $3 , 24$
فائدة	يمكن استعمال أساس المتتابعة الهندسية لإيجاد الأوساط الهندسية

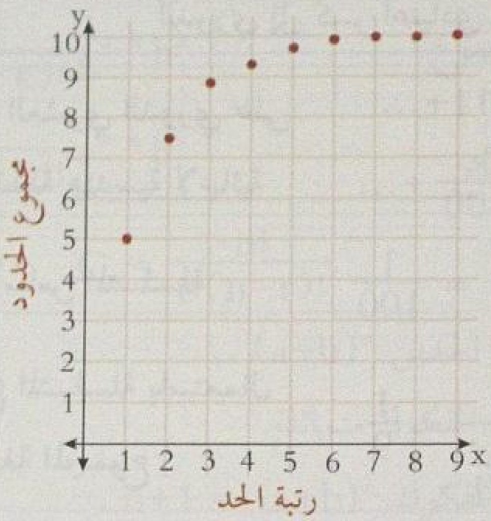
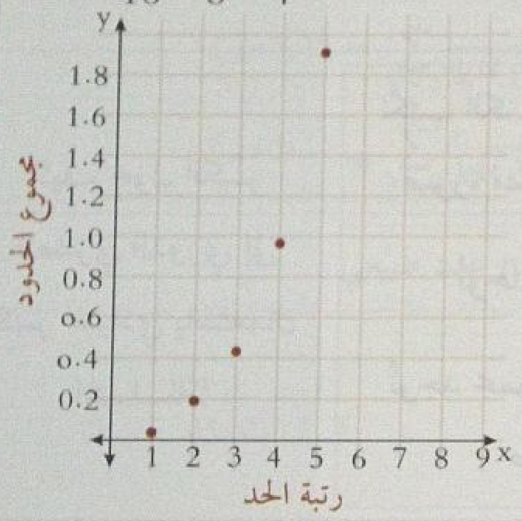
المجموع الجزئي في متسلسلة هندسية

المتسلسلة الهندسية	مجموع حدود المتتابعة الهندسية		
مجموعها	يرمز لمجموع المتسلسلة الهندسية بالرمز $\sum_{k=1}^{n} a_1 (r)^{k-1}$ ؛ حيث r أساس المتسلسلة		
المجموع الجزئي في متسلسلة هندسية	المقصود به	ناتج جمع الحدود n الأولى من المتسلسلة الهندسية	S_n المجموع الجزئي a_1 الحد الأول a_n الحد الأخير r الأساس n عدد الحدود
	صيغته العامة	$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r} \;;\; r \neq 1$	
	صيغته البديلة	$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r} \;;\; r \neq 1$	
تنبيهان	• الصيغة العامة للمجموع الجزئي تُستخدم إذا عُلم الحد الأول a_1 وعدد الحدود n . • الصيغة البديلة للمجموع الجزئي تُستخدم إذا عُلم الحد الأول a_1 والحد الأخير a_n .		
تذكر	للحصول على عدد حدود المتسلسلة .. نطرح أول قيمة لـ k من آخر قيمة لـ k ثم نضيف ١		

المتسلسلة الهندسية غير المنتهية

المقصود بها	متسلسلة لها عدد لانهائي من الحدود

نوعاها

	المتسلسلات المتقاربة	المتسلسلات المتباعدة
المقصود بها	متسلسلة يقترب مجموعها من عدد حقيقي	متسلسلة لا يقترب مجموعها من عدد حقيقي
الأساس	$\lvert r\rvert < 1$	$\lvert r\rvert \geq 1$
مثال توضيحي	للمتسلسلة $5+2.5+1.125+\dots$ 	للمتسلسلة $\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\dots$ 

مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية

صيغته	$S = \frac{a_1}{1-r}$	S مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية r أساس المتسلسلة؛ حيث: $\lvert r\rvert < 1$
تنبيه	إذا كان $\lvert r\rvert \geq 1$ فلا يوجد للمتسلسلة مجموع	
مثال توضيحي	مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي حدها الأول 25 وأساسها $\frac{1}{2}$ .. $S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{25}{1-\frac{1}{2}} = 50$	

مجموع المتسلسلة اللانهائية

التعبير الرمزي	نستعمل رمز المجموع $\sum$ لتمثيل المتسلسلات الهندسية غير المنتهية كما يلي: $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 (r)^{k-1}$ ؛ حيث a_1 الحد الأول، r أساس المتسلسلة
فائدة	الرمز ∞ يدل على أن حدود المتسلسلة تستمر إلى ما لانهاية دون توقف

مثال توضيحي	في المتسلسلة الهندسية اللانهائية $\sum_{k=1}^{\infty} 12\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$ .. • الحد الأول: $a_1 = 12$. • الأساس: $r = \frac{3}{4}$.

الكسور الدورية

الكسر العشري الدوري	الكسر العشري الدوري يساوي مجموع متسلسلة هندسية لانهائية	
مثال توضيحي	$0.\overline{45} = 0.454545\ldots = 0.45+0.0045+0.000045+\ldots$	
تنبيه	يمكن استعمال صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية لتحويل الكسر العشري الدوري إلى كسر اعتيادي	
كيف نحول الكسر العشري الدوري إلى كسر اعتيادي باستعمال المتسلسلة؟	نكتب الكسر العشري الدوري على صورة متسلسلة هندسية لانهائية	$0.\overline{11} = 0.11+0.0011+\ldots = \frac{11}{100}+\frac{11}{10000}+\ldots$
	نُوجد أساس المتسلسلة	$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{0.0011}{0.11} = \frac{1}{100}$
	نُوجد مجموع المتسلسلة باستعمال صيغة المجموع	$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{11}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{1}{9}$

مثلث باسكال

استعماله	يستعمل لإيجاد معاملات مفكوك المقدار $(a+b)^n$													
تنبيه	يُستخدم مثلث باسكال ـ فقط ـ عندما يكون معامل $a = 1$ ، ومعامل $b = 1$													
مثلث باسكال	معاملات مفكوك الأس 0						1						$(a+b)^0$
	معاملات مفكوك الأس 1					1		1					$(a+b)^1$
	معاملات مفكوك الأس 2				1		2		1				$(a+b)^2$
	معاملات مفكوك الأس 3			1		3		3		1			$(a+b)^3$
	معاملات مفكوك الأس 4		1		4		6		4		1		$(a+b)^4$
	معاملات مفكوك الأس 5	1		5		10		10		5		1	$(a+b)^5$
مثال توضيحي	إيجاد مفكوك $(a+b)^5$: نلاحظ أن الأس يساوي 5 ؛ وباستعمال معاملات مفكوك الأس 5 نجد أن .. صف معاملات الأس 5: 1 5 10 10 5 1 $(a+b)^5 = 1a^5+5a^4b^1+10a^3b^2+10a^2b^3+5a\,b^4+1b^5$													

تنبيه	لجميع الحدود في مفكوك $(a+b)^n$ فإن .. أس a + أس b = n

نظرية ذات الحدين

استعمالها	تستخدم لإيجاد مفكوك ذات الحدين $(a+b)^n$ بدلاً من استعمال مثلث باسكال
النظرية	إذا كان n عدداً طبيعياً فإنه ..

باستعمال التوافيق	$(a+b)^n = {}_nC_0a^nb^0 + {}_nC_1a^{n-1}b^1 + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \ldots + {}_nC_na^0b^n$
مثال توضيحي	$(a+b)^3 = a^3 + {}_3C_1a^2b + {}_3C_2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
باستعمال المجموع	$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k$
مثال توضيحي	$(a+b)^3 = \sum_{k=0}^{3} \frac{3!}{k!(3-k)!} a^{3-k} b^k$

تذكر	$_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ ؛ n عدد طبيعي
تنبيهات	في مفكوك ذات الحدين $(a+b)^n$ .. 1 6 15 20 15 6 1 1 7 21 35 35 21 7 1 • المعاملات في المفكوك متماثلة. • عدد الحدود لمفكوك $(a+b)^n$ = $n+1$. • أس a في الحد الأول = n ، أس b في الحد الأخير = n . • في أي حدين متتاليين: ينقص أس a بمقدار واحد ويزيد أس b بمقدار واحد.
مثال توضيحي	• الحد الخامس في مفكوك $(a+b)^{10}$: الحد الخامس = $_{10}C_4a^6b^4 = 210a^6b^4$. • الحد الثامن في مفكوك $(a+b)^{10}$: الحد الثامن = $_{10}C_7a^3b^7 = 120a^3b^7$.

الاستقراء الرياضي

المقصود به	أسلوب لبرهنة الجمل الرياضية المتعلقة بالأعداد الطبيعية
خطواته	لبرهنة أن جملة ما صحيحة للأعداد الطبيعية جميعها n نتبع الخطوات التالية: (١) نبرهن أن الجملة صحيحة عندما $n = 1$. (٢) نفرض أن الجملة صحيحة عند العدد الطبيعي k ، ويسمى فرضية الاستقراء. (٣) نبرهن أن الجملة صحيحة عند العدد الطبيعي $k+1$.

الفصل السابع: الاحتمالات

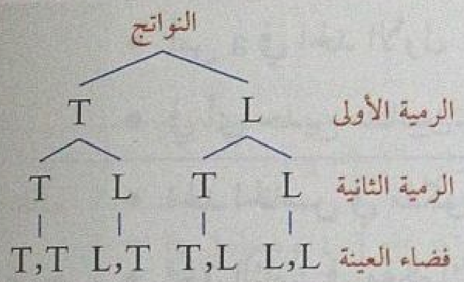
التجربة والنواتج والحادثة

التجربة	• **المقصود بها**: موقف يتضمن فرصًا تؤدي إلى نتائج تسمى **نواتج**. • **مثال توضيحي**: إلقاء قطعة نقد مرتين؛ حيث الشعار L والكتابة T .
النواتج	• **المقصود بها**: كل ما يمكن أن ينتج من تجربة ما. • **مثال توضيحي**: عند إلقاء قطعة نقد مرتين فإن جميع النواتج هي .. $\{(L,L),(T,T),(L,T),(T,L)\}$
الحادثة	• **المقصود بها**: نتيجة أو أكثر للتجربة. • **مثال توضيحي**: حادثة ظهور شعارين عند إلقاء قطعة نقد مرتين تساوي $\{(L,L)\}$.

فضاء العينة

المقصود به	مجموعة جميع النواتج الممكنة
تمثيله	يمكن تمثيله باستعمال الرسم الشجري أو القائمة المنظمة أو الجدول
مثال توضيحي	عند إلقاء قطعة نقد مرتين فإن فضاء العينة يمكن إيجاده بإحدى الطرق التالية:

الرسم الشجري



القائمة المنظمة: نكتب أزواج النواتج الممكنة من الرمية الأولى مع النواتج الممكنة من الرمية الثانية

T, L	L , L
T , T	L ,T

الجدول: تُدون نواتج الرمية الأولى في العمود الأيمن ونواتج الرمية الثانية في الصف العلوي

كتابة T	شعار L	النواتج
T , L	L , L	شعار L
T , T	L , T	كتابة T

مبدأ العد الأساسي

المقصود به	إيجاد عدد النواتج الممكنة لفضاء العينة

طريقته	نضرب عدد النواتج الممكنة في كل مرحلة من مراحل التجربة
التعبير الرمزي	في تجربة ما عدد مراحلها k نفرض أن .. n_1 = عدد النواتج الممكنة في المرحلة الأولى n_2 = عدد النواتج الممكنة في المرحلة الثانية بعد حدوث المرحلة الأولى $\vdots$ n_k = عدد النواتج الممكنة في المرحلة k بعد حدوث $k-1$ من المراحل ومنه فإن .. $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$ = العدد الكلي لنواتج تجربة عدد مراحلها k
مثال توضيحي	عند اختيارنا وجبة الكبسة من البدائل .. • اللحم أو الدجاج « 2 ». • 4 أنواع من المشروبات « 4 ». • الأرز الأحمر أو الأبيض أو الأصفر « 3 ». فإن عدد الخيارات المتاحة أمامنا = $2\times3\times4 = 24$ وجبة.

المضروب

التعبير اللفظي	• **صورته**: يُكتب مضروب العدد الصحيح الموجب n على الصورة $n!$. • **قيمته**: يساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التي هي أصغر من أو تساوي n .
التعبير الرمزي	$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1$
مثالان توضيحيان	• $5! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$. • $4! = 4\times3\times 2\times1 = 24$.
فائدتان	• $0! = 1$. • $1! = 1$.

التباديل

المقصود بها	تنظيم لمجموعة من العناصر، ويكون الترتيب فيه مهمًّا
التعبير الرمزي	عدد تباديل n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة يُرمز له بالرمز ${}_nP_r$ ، ويعطى بالعلاقة .. $${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال توضيحي: عدد تباديل 5 عناصر مأخوذة 2 في كل مرة يساوي ..

$${}_5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5\times4\times\cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20$$

التباديل مع التكرار

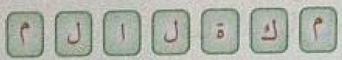
المقصود بها: هي التباديل المتمايزة لعناصر عددها n يتكرر منها عنصر r_1 من المرات، وآخر r_2 من المرات .. وهكذا

إيجادها:

$$\boxed{\text{عدد التباديل مع التكرار} = \frac{n!}{r_1!\cdot r_2!\cdot \ldots \cdot r_k!}}$$

مثال توضيحي:

حساب احتمال تكوين كلمة « المملكة » من الأحرف المجاورة:



بما أنه يوجد 7 أحرف يتكرر فيها الحرف م مرتين والحرف ل مرتين فإن ..

$$\text{عدد التباديل لهذه الأحرف} = \frac{7!}{2!\times2!} = \frac{5040}{4} = 1260$$

و بما أنه يوجد ترتيب واحد صحيح لهذه الأحرف يعطي كلمة « المملكة » فإن ..

$$\text{الاحتمال} = \frac{1}{1260}$$

التباديل الدائرية

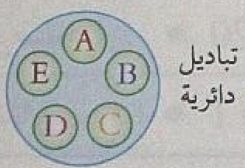
المقصود بها: عدد التباديل المختلفة لـ n من العناصر مرتبة على دائرة دون نقطة مرجع ثابتة

إيجادها:

$$\boxed{\text{عدد التباديل الدائرية} = \frac{n!}{n} = (n-1)!}$$

مثال توضيحي:

عندما نضع الأحرف A , B , C , D , E على شكل دائري أو حلقة فإن التراتيب الممكنة تسمى تباديل دائرية ..

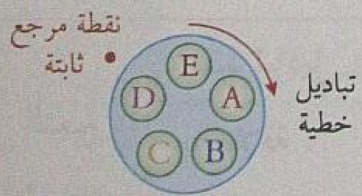


- عند تدويرها موضعًا واحدًا لا ينتج تبديل مختلف ..

$\therefore$ عدد التباديل الدائرية $= (5-1)! = 4! = 24$

- عند تدويرها بالنسبة لنقطة مرجع ثابتة فإن الترتيبات ستعامل خطيًا ..

$\therefore$ عدد التباديل $= 5! = 120$

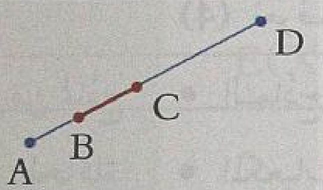
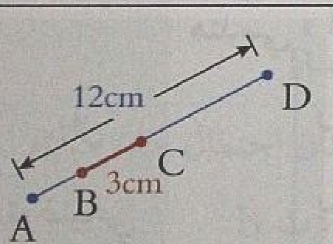


تنبيهان	• إذا رتبنا عناصر عددها n بدون نقطة مرجع ثابتة فإنها تُعدّ تبديلاً دائريًا، ويكون عدد تباديلها $(n-1)!$. • إذا رتبنا عناصر عددها n بالنسبة لنقطة مرجع ثابتة فإنها تُعدّ تبديلاً خطيًا، ويكون عدد تباديلها $n!$.

التوافيق

المقصود بها	تنظيم لمجموعة من العناصر يكون الترتيب فيه غير مُهم
التعبير الرمزي	يُرمز إلى عدد توافيق n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة بالرمز ${}_{n}C_{r}$ ، ويعطى بالعلاقة .. $\boxed{{}_{n}C_{r} = \dfrac{n!}{(n-r)! \cdot r!}}$
مثال توضيحي	عدد توافيق 8 عناصر مأخوذة 3 في كل مرة يساوي .. ${}_{8}C_{3} = \dfrac{8!}{(8-3)!\times 3!} = \dfrac{8!}{5!\times 3!} = \dfrac{8\times 7\times \cancel{6}\times \cancel{5!}}{\cancel{5!}\times \cancel{6}} = 56$
تنبيهان	• نستعمل التباديل عندما يكون ترتيب العناصر مهمًا. • نستعمل التوافيق عندما يكون ترتيب العناصر غير مهم.

الاحتمال والطول

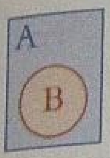
التعبير اللفظي	 إذا احتوت القطعة المستقيمة $\overline{AD}$ قطعة مستقيمة أخرى $\overline{BC}$ واخترت نقطة تقع على القطعة $\overline{AD}$ عشوائيًا فإن .. $\boxed{\text{احتمال أن تقع النقطة على } \overline{BC} = \dfrac{\text{طول القطعة المستقيمة } BC}{\text{طول القطعة المستقيمة } AD}}$
مثال توضيحي	 في الرسم المجاور: إذا اخترنا النقطة X عشوائيًا على $\overline{AD}$ فإن احتمال أن تقع X على $\overline{BC}$ هو .. $P = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4} = 25\%$

الاحتمال والمساحة

التعبير اللفظي

إذا احتوت المنطقة A منطقة أخرى B واخترت النقطة E من المنطقة A عشوائيًا فإن ..

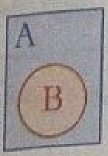
$$\text{احتمال أن تقع النقطة E في المنطقة B} = \frac{\text{مساحة المنطقة B}}{\text{مساحة المنطقة A}}$$



مثال توضيحي

إذا اخترنا النقطة E عشوائيًا في المستطيل A الذي مساحته $100\ cm^2$ فإن احتمال أن تقع E في الدائرة B التي مساحتها $35\ cm^2$ هو ..

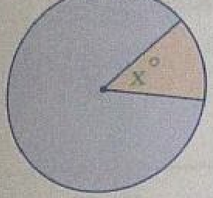
$$P = \frac{35}{100} = \frac{7}{20} = 35\%$$



تنبيه

يمكن استعمال قياس الزاوية لإيجاد الاحتمال الهندسي ..

نسبة مساحة قطاع في دائرة إلى مساحة الدائرة الكلية = نسبة قياس زاوية القطاع المركزية x° إلى 360° = $\frac{x^\circ}{360^\circ}$



تصميم المحاكاة

المقصود به

استعمال نموذج احتمالي لإعادة تكوين موقف مرة تلو الأخرى بحيث يمكن تقدير احتمالات النواتج

خطواته

(1) نحدد كل ناتج ممكن وقيمة احتماله النظري.

(2) نكتب الفرضيات الممكنة.

(3) نصف نموذجًا احتماليًا ملائمًا للموقف.

(4) نعرّف المحاولة اللازمة للموقف، ثم نُحدد عدد المحاولات الواجب إجراؤها.

من نماذج المحاكاة

- النماذج الهندسية.
- قطع النقود.
- المكعبات المرقمة.
- مولدات الأعداد العشوائية بالآلة الحاسبة.

مثال توضيحي

بناءً على تدريب فهد في ركلات الجزاء فإنه يسجل 80% منها في المرمى ويخطئ في 20% منها، ويمكن التنبؤ بعدد ركلات الجزاء التي يسجلها في المرمى في مباراةٍ قادمة ببناء نموذج هندسي « القرص ذو المؤشر » لتقدير احتمال أن يسجل فهد ركلة الجزاء ..

ركلات الجزاء	قياس زاوية القطاع	القرص ذو المؤشر
يسجل 80%	$\frac{80}{100}\times 360^\circ = 228^\circ$	
يخطئ 20%	$\frac{20}{100}\times 360^\circ = 72^\circ$	

فائدتان:

- نجاح المحاولة يعني تسجيل الهدف، وفشلها يعني عدم التسجيل.
- بعد تصميم عملية المحاكاة يجب علينا إجراؤها وتسجيل النتائج.

المتغير العشوائي

المقصود به	المتغير الذي يأخذ مجموعة قيم لها احتمالات معلومة
مثال توضيحي	في تجربة رمي مكعبين مرقمين متمايزين مرة واحدة .. • المتغير العشوائي X يُمثل مجموع العددين الظاهرين على المكعبين. • الجدول المجاور يُبين بعض قيم X المعينة لنواتج هذه التجربة.

النواتج	قيم X
(1,1)	2
(1,2)	3
(2,1)	3
⋮	⋮
(6,6)	12

القيمة المتوقعة

المقصود بها	معدل قيم المتغير العشوائي المتوقعة عند إعادة التجربة أو محاكاتها نظريًا عددًا لانهائيًا من المرات
حساب القيمة المتوقعة	لإيجاد القيمة المتوقعة E(X) للمتغير العشوائي X نتبع التالي: **الخطوة1:** نضرب قيمة X في احتمال حدوثها. **الخطوة2:** نُكرر الخطوة1 لجميع قيم X الممكنة. **الخطوة3:** نُوجد مجموع نواتج الضرب.
مثال توضيحي	الجدول المجاور يوضح قيم المتغير العشوائي X وقيم الاحتمال المناظرة .. ولإيجاد القيمة المتوقعة E(X) ..

X	2	3	5
$P(X)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{12}$

$$E(X) = 2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{12}+5\times\frac{7}{12} = \frac{23}{6} \approx 3.83$$

الحادثة المركبة

المقصود بها	حادثة تتكون من حادثتين بسيطتين أو أكثر
نوعاها	**حادثتان مستقلتان:** تكون A و B حادثتين مستقلتين إذا كان احتمال حدوث A لا يؤثر في احتمال حدوث B **حادثتان غير مستقلتين:** تكون A و B حادثتين غير مستقلتين إذا كان احتمال حدوث A يُغير بطريقةٍ ما احتمال حدوث B
مثال توضيحي	عند اختيارنا بطاقة عشوائيًا من صندوق ما .. • إذا أُعيدت البطاقة في كل مرة فإن اختيار بطاقات أخرى هي **حوادث مستقلة.** • إذا لم تُرجع البطاقة في كل مرة فإن اختيار بطاقات أخرى هي **حوادث غير مستقلة.**

الحادثة البسيطة	حادثة تتكون من ناتج واحد من النواتج الممكنة لتجربة ما
مثال توضيحي	عندما نرمي مكعب مُرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة فإن .. نواتج التجربة « فضاء العينة » = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ والحادثة التي تمثل ظهور العدد 5 مثلاً هي حادثة بسيطة لأنها تظهر مرة واحدة فقط.

احتمال حادثتين مستقلتين

التعبير اللفظي	احتمال وقوع حادثتين مستقلتين معًا يساوي حاصل ضرب احتمالي الحادثتين
التعبير الرمزي	إذا كانت الحادثتان A و B مستقلتين فإن .. $P(A \text{ و } B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ فائدة: يمكن تعميم القانون لأيّ عدد من الحوادث المستقلة.
تنبيه	الحرف و يدل على وقوع الحادثتين معًا ويشير إلى ضرب الاحتمالات، ويُرمز له برمز التقاطع $\cap$
فائدة	العبارة $P(A \text{ و } B)$ تُقرأ « احتمال وقوع A و وقوع B »
مثال توضيحي	عند إلقاء قطعة نقد A ورمي مكعب مرقم B مرة واحدة؛ لحساب احتمال ظهور الشعار L والعدد 5 نجد أن .. • احتمال ظهور الشعار L عند إلقاء قطعة النقد = $P(A) = \frac{1}{2}$. • احتمال ظهور العدد 5 عند رمي المكعب المرقم = $P(B) = \frac{1}{6}$. $\therefore$ احتمال ظهور الشعار L والعدد 5 = $P(B) \cdot P(A) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$
فائدة في المثال السابق	فضاء العينة = $\{(L,1), (L,2), (L,3), (L,4), (L,5), (L,6), (T,1), (T,2), (T,3), (T,4), (T,5), (T,6)\}$ $\therefore$ احتمال ظهور الشعار و العدد 5 = $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$

احتمال حادثتين غير مستقلتين

التعبير اللفظي	احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين معًا يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع الحادثة الأولى في احتمال حدوث الحادثة الثانية بعد وقوع الأولى فعلاً
التعبير الرمزي	إذا كانت الحادثتان A و B غير مستقلتين فإن .. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$ فائدة: يمكن تعميم القانون لأيّ عدد من الحوادث غير المستقلة.
فائدة	العبارة $P(B \mid A)$ تُقرأ « احتمال وقوع B بشرط وقوع الحادثة A أولاً »، وتسمى الاحتمال المشروط

تنبيهان	• لأي حادثة X في تجربة عشوائية يكون $0 \le P(X) \le 1$. • مجموع احتمالات جميع الحوادث البسيطة لتجربة عشوائية يساوي 1 .

الاحتمال المشروط

المقصود به	اختزال فضاء العينة عند معرفة معلومات إضافية عن حادثة في تجربة عشوائية
التعبير الرمزي	الاحتمال المشروط لـ B إذا وقع A هو .. $P(A) \neq 0$ حيث $P(B\|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
مثال توضيحي	رُمي مكعب مرقم مرة واحدة وكان العدد الظاهر على وجه المكعب عدد فردي « **الشرط** »؛ أوجد احتمال أن يكون هذا العدد 5 . الحل: بما أنه يمكن ظهور ثلاث أعداد فردية على وجه المكعب فإن .. فضاء العينة يختزل من $\{ 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1 \}$ إلى $\{ 5 , 3 , 1 \}$ ومنه فإن احتمال أن يظهر العدد 5 .. $P(5\|\text{عدد فردي}) = \frac{1}{3}$

الحوادث المتنافية والحوادث غير المتنافية

الحادثتان المتنافيتان	• المقصود بها: حادثتان لا توجد عناصر مشتركة بينهما. • مثال: عند اختيار عدد عشوائي من الأعداد $\{ 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1 \}$ والحصول على عدد زوجي أو عدد فردي فهاتان الحادثتان متنافيتان لعدم وجود عناصر مشتركة بينهما.
الحادثتان غير المتنافيتين	• المقصود بها: حادثتان يوجد بينهما عناصر مشتركة. • مثال: عند اختيار عدد عشوائي من الأعداد $\{ 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1 \}$ والحصول على عدد زوجي أو عدد أكبر من 2 فهاتان الحادثتان غير متنافيتين لوجود عناصر مشتركة بينهما.

احتمال الحادثتين المتنافيتين

التعبير اللفظي	إذا كانت الحادثتان A , B متنافيتين فاحتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتمال كلٍ منهما
التعبير الرمزي	إذا كانت الحادثتان A , B متنافيتين فإن .. $P(A \text{ أو } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ فائدة: يمكن تعميم هذا القانون على أي عدد من الحوادث المتنافية.

الحادثة البسيطة	حادثة تتكون من ناتج واحد من النواتج الممكنة لتجربة ما
مثال توضيحي	عندما نرمي مكعب مُرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة فإن .. نواتج التجربة « فضاء العينة » = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ والحادثة التي تمثل ظهور العدد 5 مثلاً هي حادثة بسيطة لأنها تظهر مرة واحدة فقط.

احتمال حادثتين مستقلتين

التعبير اللفظي	احتمال وقوع حادثتين مستقلتين معًا يساوي حاصل ضرب احتمالي الحادثتين
التعبير الرمزي	إذا كانت الحادثتان A و B مستقلتين فإن .. $P(\text{A و B}) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ **فائدة:** يمكن تعميم القانون لأيّ عدد من الحوادث المستقلة.
تنبيه	الحرف و يدل على وقوع الحادثتين معًا ويشير إلى ضرب الاحتمالات، ويُرمز له برمز التقاطع $\cap$
فائدة	العبارة $P(\text{A و B})$ تُقرأ « احتمال وقوع A و وقوع B »
مثال توضيحي	عند إلقاء قطعة نقد A ورمي مكعب مرقم B مرة واحدة؛ لحساب احتمال ظهور الشعار L والعدد 5 نجد أن .. • احتمال ظهور الشعار L عند إلقاء قطعة النقد $= P(A) = \frac{1}{2}$. • احتمال ظهور العدد 5 عند رمي المكعب المرقم $= P(B) = \frac{1}{6}$. ∴ احتمال ظهور الشعار L والعدد 5 $= P(B) \cdot P(A) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$
فائدة في المثال السابق	فضاء العينة = $\{(L,1), (L,2), (L,3), (L,4), (L,5), (L,6),$ $(T,1), (T,2), (T,3), (T,4), (T,5), (T,6)\}$ ∴ احتمال ظهور الشعار و العدد 5 $= P(A \cap B) = \frac{1}{12}$

احتمال حادثتين غير مستقلتين

التعبير اللفظي	احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين معًا يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع الحادثة الأولى في احتمال حدوث الحادثة الثانية بعد وقوع الأولى فعلاً
التعبير الرمزي	إذا كانت الحادثتان A و B غير مستقلتين فإن .. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$ **فائدة:** يمكن تعميم القانون لأيّ عدد من الحوادث غير المستقلة.
فائدة	العبارة $P(B \mid A)$ تُقرأ « احتمال وقوع B بشرط وقوع الحادثة A أولاً »، وتسمى الاحتمال المشروط

تنبيهان	• لأي حادثة X في تجربة عشوائية يكون $0 \le P(X) \le 1$. • مجموع احتمالات جميع الحوادث البسيطة لتجربة عشوائية يساوي 1 .

الاحتمال المشروط

المقصود به	اختزال فضاء العينة عند معرفة معلومات إضافية عن حادثة في تجربة عشوائية
التعبير الرمزي	الاحتمال المشروط لـ B إذا وقع A هو .. $P(B\|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ حيث $P(A) \neq 0$
مثال توضيحي	رُمي مكعب مرقم مرة واحدة وكان العدد الظاهر على وجه المكعب عدد فردي « الشرط »؛ أوجد احتمال أن يكون هذا العدد 5 . **الحل:** بما أنه يمكن ظهور ثلاث أعداد فردية على وجه المكعب فإن .. فضاء العينة يختزل من { 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1 } إلى { 5 , 3 , 1 } ومنه فإن احتمال أن يظهر العدد 5 .. $P(5\|\text{عدد فردي}) = \dfrac{1}{3}$

الحوادث المتنافية والحوادث غير المتنافية

الحادثتان المتنافيتان	• **المقصود بها:** حادثتان لا توجد عناصر مشتركة بينهما. • **مثال:** عند اختيار عدد عشوائي من الأعداد { 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1 } والحصول على عدد زوجي **أو** عدد فردي فهاتان الحادثتان متنافيتان لعدم وجود عناصر مشتركة بينهما.
الحادثتان غير المتنافيتين	• **المقصود بها:** حادثتان يوجد بينهما عناصر مشتركة. • **مثال:** عند اختيار عدد عشوائي من الأعداد { 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1 } والحصول على عدد زوجي **أو** عدد أكبر من 2 فهاتان الحادثتان غير متنافيتين لوجود عناصر مشتركة بينهما.

احتمال الحادثتين المتنافيتين

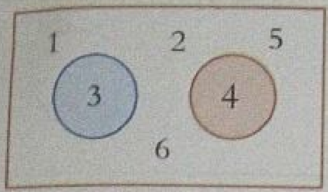
التعبير اللفظي	إذا كانت الحادثتان A , B متنافيتين فاحتمال وقوع A **أو** B يساوي مجموع احتمال كلٍ منهما
التعبير الرمزي	إذا كانت الحادثتان A , B متنافيتين فإن .. $P(A \text{ أو } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ **فائدة:** يمكن تعميم هذا القانون على أي عدد من الحوادث المتنافية.

تنبيه: الحرف **أو** يدل على وقوع أحد الحدثين على الأقل، ويشير إلى جمع الاحتمالات، ويرمز له برمز الاتحاد $\cup$

فائدة: العبارة $P(A$ أو $B)$ تُقرأ « احتمال وقوع A **أو** وقوع B »

مثال توضيحي:

عند رمي مكعب مرقم وإيجاد احتمال ظهور العدد 3 أو 4 نجد أن ..



- الحادثتين متنافيتان؛ لأنه لا يمكن ظهور العدد 3 و 4 في آنٍ واحد.
- فضاء العينة = $\{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$.
- احتمال الحادثة ظهور العدد 3 = $P(3) = \frac{1}{6}$.
- احتمال الحادثة ظهور العدد 4 = $P(4) = \frac{1}{6}$.
- احتمال ظهور العدد 3 أو 4 يساوي ..

$$P(3 \text{ أو } 4) = P(3)+P(4) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

احتمال الحادثتين غير المتنافيتين

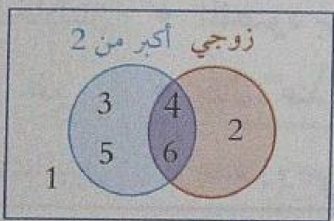
التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان A , B غير متنافيتين فاحتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتماليهما مطروحًا منه احتمال وقوع A و B معًا

التعبير الرمزي: إذا كانت الحادثتان A , B غير متنافيتين فإن ..

$$\boxed{P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$

مثال توضيحي:

عند رمي مكعب مُرقم وإيجاد احتمال الحصول على عدد أكبر من 2 أو زوجي نجد أن ..



- الحادثتان غير متنافيتين؛ لأنه يمكن الحصول على عدد أكبر من 2 وزوجي في الوقت نفسه.
- فضاء العينة = $\{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$.
- الحادثة A عدد أكبر من 2 = $\{3 , 4 , 5 , 6\}$.

$$\therefore \quad P(\text{أكبر من } 2) = P(A) = \frac{4}{6}$$

- الحادثة B عدد زوجي = $\{2 , 4 , 6\}$.

$$\therefore \quad P(\text{زوجي}) = P(B) = \frac{3}{6}$$

- التقاطع بين الحدثين ..

$$A\cap B = \{4 , 6\} \quad \Rightarrow \quad P(A\cap B) = \frac{2}{6}$$

- نُوجد احتمال الحصول على عدد أكبر من 2 أو عدد زوجي ..

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = \frac{4}{6}+\frac{3}{6}-\frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

الحادثة المتممة

التعبير اللفظي	احتمال عدم وقوع حادثة يساوي 1 ناقص احتمال وقوع الحادثة	
التعبير الرمزي	لأيّ حادثة A .. $P(A`) = 1-P(A)$	$A`$ الحدث المتمم للحدث A
مثال توضيحي	إذا كان احتمال أن يتناول فهد الفطور 20% فإن احتمال عدم فطوره .. $P(\text{عدم فطوره}) = 1-P(\text{فطوره})$ $P(\text{عدم فطوره}) = 1-\frac{20}{100} = \frac{80}{100} = 80\%$	

ملخص قوانين الاحتمال

نوع الحادثة	القانون
الحادثتان A , B مستقلتان	$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$
الحادثتان A , B غير مستقلتين	$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B\|A)$
الحادثة B بشرط وقوع A	$P(B\|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$
الحادثتان A , B متنافيتان	$P(A\cup B) = P(A)+P(B)$
الحادثتان A , B غير متنافيتين	$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
الحادثة المتممة لـ A	$P(A`) = 1-P(A)$

تنبيهات:

- مجموع احتمالات جميع الحوادث البسيطة لتجربة عشوائية = 1 .
- لأيّ حادثة A في تجربة عشوائية فإن $0 \le P(A) \le 1$.
- $P(A`\cup B`) = P(A\cap B)`$.
- $P(A`\cap B`) = P(A\cup B)`$.

الفصل الثامن: الدوال والمتباينات

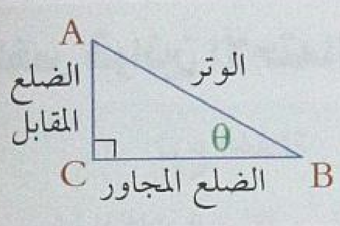
الدوال المثلثية للزوايا الحادة

حساب المثلثات	دراسة العلاقات بين زوايا وأضلاع المثلث قائم الزاوية
النسبة المثلثية	تقارن النسبة المثلثية بين طولي ضلعين في المثلث قائم الزاوية
الدالة المثلثية	تُعرف الدالة المثلثية من خلال نسبة مثلثية
تنبيه	الرمز الإغريقي θ « ثيتا » يرمز لقياس زاوية حادة في المثلث قائم الزاوية

الدوال المثلثية في مثلث قائم الزاوية

التعبير اللفظي

إذا كانت θ تمثل قياس زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية فإن الدوال المثلثية الست تُعرف بدلالة الوتر والضلع المقابل والضلع المجاور للزاوية

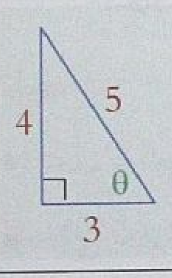


التوضيح بالرموز

$\csc\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$	قاطع تمام θ	$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$	جيب θ
$\sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$	قاطع θ	$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$	جيب تمام θ
$\cot\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$	ظل تمام θ	$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$	ظل θ

مثال توضيحي

$\tan\theta = \frac{4}{3}$	$\cos\theta = \frac{3}{5}$	$\sin\theta = \frac{4}{5}$
$\cot\theta = \frac{3}{4}$	$\sec\theta = \frac{5}{3}$	$\csc\theta = \frac{5}{4}$



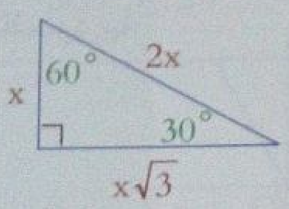
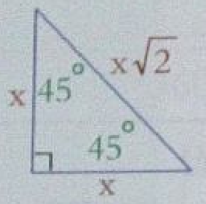
العلاقات بين النسب المثلثية

- النسبة المثلثية قاطع التمام **مقلوب** النسبة المثلثية الجيب؛ $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$.
- النسبة المثلثية القاطع **مقلوب** النسبة المثلثية جيب التمام؛ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$.
- النسبة المثلثية ظل التمام **مقلوب** النسبة المثلثية الظل؛ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$.

فائدتان

- الدوال المثلثية **تعتمد** على قياسات الزوايا الحادة.
- الدوال المثلثية **لا تعتمد** على أطوال أضلاع المثلث قائم الزاوية.

قيم بعض الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

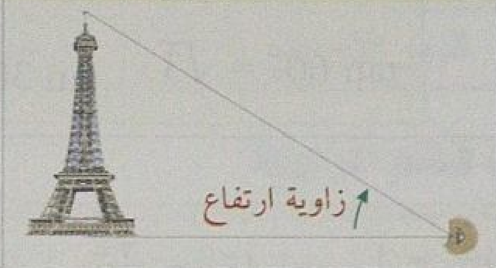
الزوايا الخاصة	• **المقصود بها**: الزوايا التي تتكرر قياساتها كثيرًا في حساب المثلثات. • **أمثلة توضيحية**: الزوايا التي قياساتها $60°$, $45°$, $30°$ هي زوايا خاصة.
الدوال المثلثية لمثلث زواياه $30° - 60° - 90°$	$\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$ $\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\tan 60° = \sqrt{3}$ 
الدوال المثلثية لمثلث زواياه $45° - 45° - 90°$	$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan 45° = 1$ 
تنبيهان	• يمكن استعمال الدوال المثلثية لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة وقياسات الزوايا المجهولة في مثلث قائم الزاوية. • إذا كان طول الوتر مجهولاً فإننا نوجده باستعمال دالة الجيب أو دالة جيب التمام.

معكوس النسب المثلثية

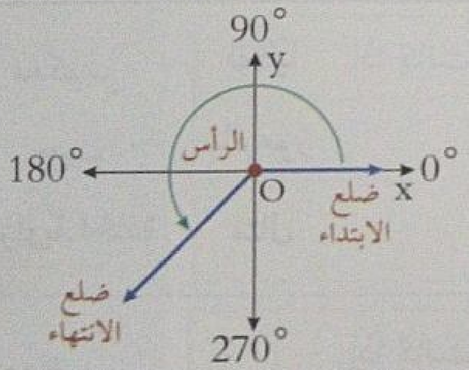
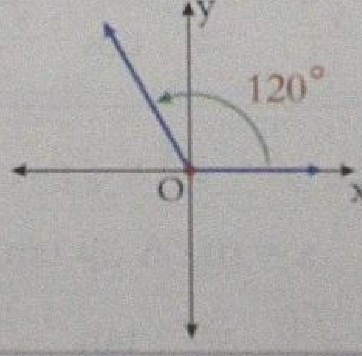
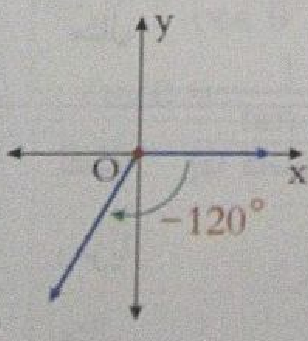
معكوس جيب الزاوية الحادة	لفظيًا	إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة وجيبها يساوي x فإن **معكوس جيب x** هو قياس $\angle A$
	بالرموز	إذا كان $\sin A = x$ فإن $\sin^{-1} x = m\angle A$
	مثال	$\sin A = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^{-1} \frac{1}{2} = m\angle A = 30°$
معكوس جيب تمام الزاوية الحادة	لفظيًا	إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة وجيب تمامها يساوي x فإن **معكوس جيب تمام x** هو قياس $\angle A$
	بالرموز	إذا كان $\cos A = x$ فإن $\cos^{-1} x = m\angle A$
	مثال	$\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} = m\angle A = 45°$
معكوس ظل الزاوية الحادة	لفظيًا	إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة وظلها يساوي x فإن **معكوس ظل x** هو قياس $\angle A$
	رمزيًا	إذا كان $\tan A = x$ فإن $\tan^{-1} x = m\angle A$
	مثال	$\tan A = \sqrt{3} \Rightarrow \tan^{-1} \sqrt{3} = m\angle A = 60°$

	sin x
فائدة	العبارة $\sin^{-1} x$ تُقرأ « معكوس جيب x »، وتعنى الزاوية التي جيبها x

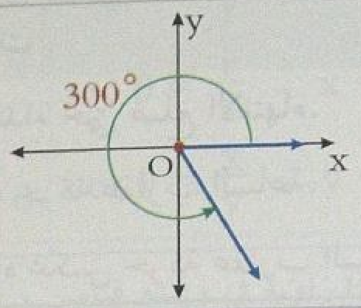
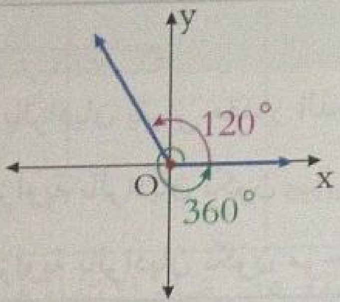
زوايا الارتفاع والانخفاض

المقصود بها	الزاوية المحصورة بين خط أفقي وخط نظر الناظر إلى الهدف
نوعاها	**زاوية الارتفاع**:  **زاوية الانخفاض**: 
تنبيه	زاويتا الارتفاع والانخفاض للحالة الواحدة متطابقتان لأنهما زاويتان داخليتان متبادلتان لخطين متوازيين

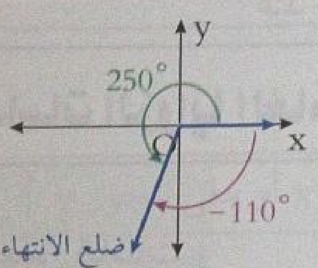
زاوية المرسومة في الوضع القياسي

عريفها	{ زاوية مرسومة في المستوى الإحداثي رأسها نقطة الأصل وأحد ضلعيها منطبق على الجزء الموجب من المحور x }
لعاها	**ضلع الابتداء**: ضلع الزاوية المنطبق على محور x **ضلع الانتهاء**: ضلع الزاوية الذي يدور حول نقطة الأصل 
اسات زوايا	**الزاوية الموجبة**: ضلع انتهاء الزاوية دار عكس حركة عقارب الساعة  **الزاوية السالبة**: ضلع انتهاء الزاوية دار مع حركة عقارب الساعة 

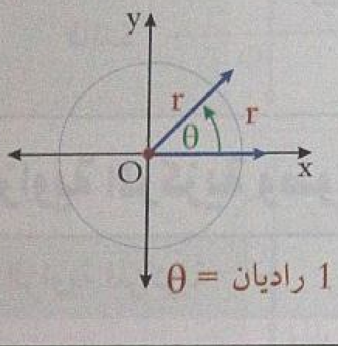
رسم زاوية في الوضع القياسي

	يدور دورة واحدة أو أقل	يدور أكثر من دورة
حالات ضلع الانتهاء لزاوية	يكون قياس الزاوية 360° أو أقل	يكون قياس الزاوية أكثر من 360°
	مثال: الزاوية 300°	**مثال:** الزاوية $480^\circ = 360^\circ + 120^\circ$
		

فائدة	عند دوران ضلع الانتهاء لزاوية **دورة كاملة** يكون مقدارها 360°

تنبيه	يمكن إيجاد زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء مع زاوية أخرى من خلال جمع أو طرح أحد مضاعفات 360°	
مثال توضيحي	الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية -110° .. الزاوية المشتركة $= -110^\circ + 360^\circ = 250^\circ$	

القياس بالدرجات والقياس بالراديان

الراديان	
قياس الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي ويقطع ضلع الانتهاء لها قوسًا طوله مساوٍ لطول نصف قطر الدائرة r	
العلاقة بين القياس بالدرجات والقياس بالراديان	
• $2\pi \text{ Rad} = 360^\circ$. • $\pi \text{ Rad} = 180^\circ$.	

التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان

$$\text{قياس الزاوية بالراديان} = \text{قياس الزاوية بالدرجات} \times \frac{\pi \text{ راديان}}{180^\circ}$$

التحويل من القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات

$$\text{قياس الزاوية بالدرجات} = \text{قياس الزاوية بالراديان} \times \frac{180^\circ}{\pi \text{ راديان}}$$

مثالان توضيحيان

تحويل $-30°$ إلى راديان	$-30° = -30\cancel{°} \times \dfrac{\pi \text{ rad}}{180\cancel{°}} = \dfrac{-30\pi}{180} = -\dfrac{\pi}{6} \text{ rad}$
تحويل $\dfrac{5\pi}{2}$ rad إلى درجات	$\dfrac{5\pi}{2} = \dfrac{5\cancel{\pi}}{2} \cancel{\text{rad}} \times \dfrac{180°}{\cancel{\pi \text{ rad}}} = \dfrac{900°}{2} = 450°$

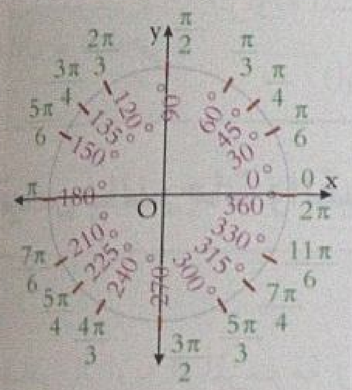
تنبيهات

- القياس بالراديان يقيس مقدار الدوران من ضلع الابتداء حتى ضلع الانتهاء.
- قياس الزاوية بالراديان تكون سالبة إذا كانت في اتجاه حركة عقارب الساعة.
- قياس الزاوية بالراديان تكون موجبة إذا كانت في اتجاه عكس حركة عقارب الساعة.

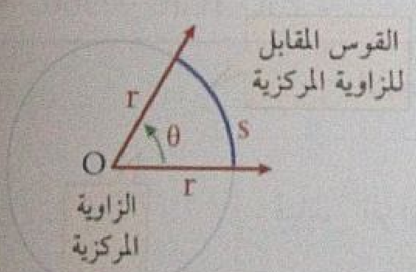
فائدة

عند عدم وجود وحدة قياس لزاوية فإن وحدة قياسها تكون راديان

قياسات الزوايا الخاصة بالدرجات وبالراديان

بعض قياسات الزوايا الخاصة	$30° = \dfrac{\pi}{6}$ ، $60° = \dfrac{\pi}{3}$ ، $45° = \dfrac{\pi}{4}$ ، $90° = \dfrac{\pi}{2}$	
فائدة	قياسات الزوايا الخاصة الأخرى هي مضاعفات لقياسات الزوايا أعلاه	

الزاوية المركزية وطول القوس

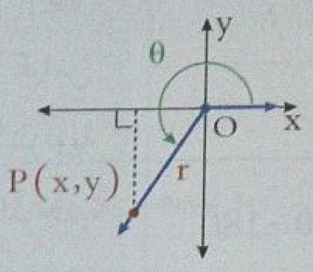
الزاوية المركزية	{ زاوية رأسها يقع على مركز الدائرة }	
طول القوس في دائرة	لدائرة طول نصف قطرها r تحوي زاوية مركزية قياسها θ فإن طول القوس s المقابل لهذه الزاوية يساوي حاصل ضرب r في θ	
العلاقة الرياضية	$\boxed{s = r\,\theta}$	
مثال توضيحي	لدائرة طول نصف قطرها 27 m وزاويتها المركزية $\dfrac{10\pi}{9}$ فإن طول القوس .. $s = r\,\theta = 27 \times \dfrac{10\pi}{9} = 30\pi = 94.2 \text{ m}$	
تنبيه	الدورة الكاملة على الدائرة تساوي 2π راديان	

الدوال المثلثية للزوايا

قيم الدوال المثلثية لزوايا قياساتها تزيد عن 90° أو تنقص عن 0° بمعلومية نقطة

إذا كانت θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي، والنقطة $P(x,y)$ تقع على ضلع الانتهاء لها، وقيمة r من نظرية فيثاغورس $r=\sqrt{x^2+y^2}$ فإن قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ ..

$\csc\theta=\dfrac{r}{y}\ ,\ y\neq 0$	$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$
$\sec\theta=\dfrac{r}{x}\ ,\ x\neq 0$	$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$
$\cot\theta=\dfrac{x}{y}\ ,\ y\neq 0$	$\tan\theta=\dfrac{y}{x}\ ,\ x\neq 0$



مثال توضيحي

إذا كانت θ زاوية في وضع قياسي، و $P(3,5)$ نقطة تقع على ضلع الانتهاء لها فإن ..

- $\tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{3}$.
- $\cot\theta=\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{5}$.

الزاوية الرُّبعية

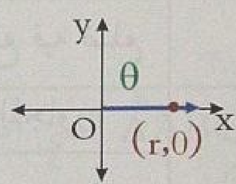
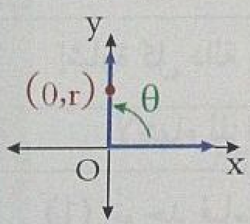
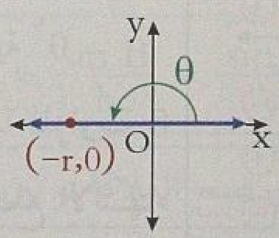
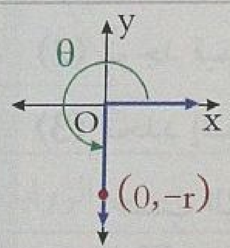
تعريفها

{ زاوية مرسومة في الوضع القياسي يقع ضلع الانتهاء لها على المحور x أو على المحور y }

تنبيه

قياس الزوايا الرُّبعية من مضاعفات 90° أي من مضاعفات $\dfrac{\pi}{2}$ rad

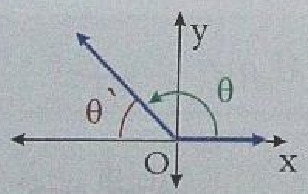
حالاتها

$\theta=0^\circ$ أو $\theta=0$ rad		$\theta=90^\circ$ أو $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ rad	
$\theta=180^\circ$ أو $\theta=\pi$ rad		$\theta=270^\circ$ أو $\theta=\dfrac{3\pi}{2}$ rad	

الزاوية المرجعية

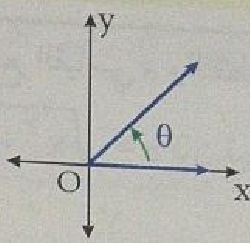
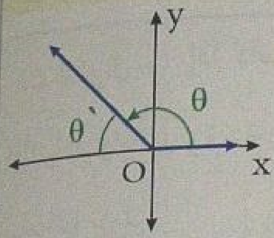
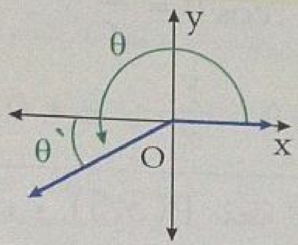
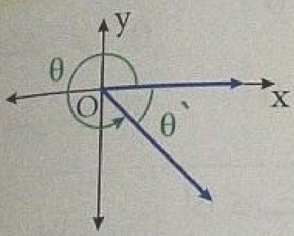
تعريفها

{ زاوية حادة محصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x ؛ حيث θ زاوية غير ربعية مرسومة في الوضع القياسي }

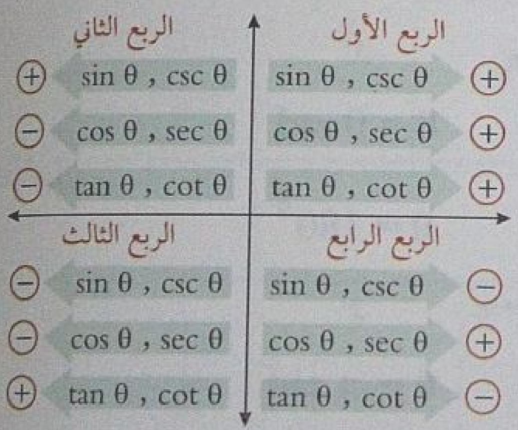


فائدة

يرمز للزاوية المرجعية بالرمز $\theta^`$ ، ونقرأها: ثيتا برايم

قواعد إيجاد قياس الزاوية المرجعية للزاوية θ	**الربع الأول**  $\theta = \theta`$	**الربع الثاني**  $\theta` = 180^\circ - \theta$ $\theta` = \pi - \theta$
	الربع الثالث  $\theta` = \theta - 180^\circ$ $\theta` = \theta - \pi$	**الربع الرابع**  $\theta` = 360^\circ - \theta$ $\theta` = 2\pi - \theta$
	تنبيه: لجميع الحالات السابقة $0^\circ < \theta < 360^\circ$ **أو** $0 < \theta < 2\pi$.	
تنبيه	لإيجاد الزاوية المرجعية للزاوية θ التي قياسها أكبر من 360° أو أقل من 0° نستخدم زاوية بقياس موجب محصورة بين 360° و 0° ومشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية θ	

إيجاد قيم الدوال المثلثية

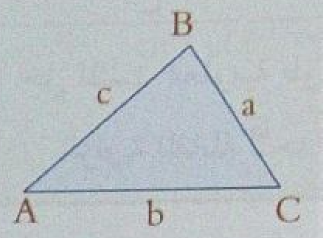
فائدة	الزوايا المرجعية تُستعمل لإيجاد قيم الدوال المثلثية لأيّ زاوية θ	
تحديد إشارة الدوال المثلثية	إشارة كل دالة يُحدّدها الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية θ كما في الشكل المجاور	
خطوات إيجاد قيم الدوال المثلثية	(1) نُوجد قياس الزاوية المرجعية $\theta`$ . (2) نُوجد قيمة الدالة المثلثية للزاوية $\theta`$. (3) نُحدد إشارة قيمة الدالة المثلثية للزاوية θ حسب الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية θ .	

قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

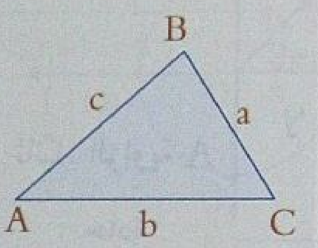
الجيب	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$	$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
جيب التمام	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$
الظل	$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\tan 45^\circ = 1$	$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

قاطع التمام	$\csc 30^\circ = 2$	$\csc 45^\circ = \sqrt{2}$	$\csc 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
القاطع	$\sec 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sec 45^\circ = \sqrt{2}$	$\sec 60^\circ = 2$
ظل التمام	$\cot 30^\circ = \sqrt{3}$	$\cot 45^\circ = 1$	$\cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

مساحة المثلث

التعبير اللفظي	مساحة المثلث تساوي نصف حاصل ضرب طولي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما	
التوضيح الرموز	مساحة المثلث $= \frac{1}{2}ab \sin C$ مساحة المثلث $= \frac{1}{2}bc \sin A$ مساحة المثلث $= \frac{1}{2}ac \sin B$	
مثال توضيحي	إذا كان ΔABC فيه $C = 45^\circ$, $b = 6$ cm , $a = 5$ cm فإن .. مساحة المثلث $= \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}\times 5\times 6 \sin 45^\circ = \frac{15\sqrt{2}}{2}$ cm^2	

قانون الجيوب

القانون	إذا كانت أضلاع ΔABC التي أطوالها a , b , c تقابل الزوايا ذات القياسات A , B , C فإن .. $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$	
فائدة	قانون الجيوب يوضح العلاقات بين أطوال أضلاع مثلث وجيوب الزوايا المقابلة لها	
مثال توضيحي	لإيجاد الزاوية B في ΔABC الذي فيه: $A = 30^\circ$, $a = 2$, $b = 2\sqrt{3}$ فإن .. $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \Rightarrow \frac{\sin 30^\circ}{2} = \frac{\sin B}{2\sqrt{3}}$ $\therefore \sin B = \frac{\sin 30^\circ \times 2\sqrt{3}}{2} \approx 0.8660 \Rightarrow B \approx 60^\circ$	
صورة أخري لقانون الجيوب	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$	
حل المثلث	استعمال القياسات المعطاة في إيجاد المجهول من أطوال أضلاع المثلث وقياس زواياه	

متى يستعمل قانون الجيوب؟	معرفة قياسي زاويتين في المثلث وطول أي ضلع فيه	• حالة ASA « زاوية – ضلع – زاوية ».
	معرفة طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما	حالة SSA « ضلع – ضلع – زاوية »

حالات حل المثلث

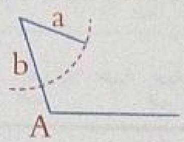
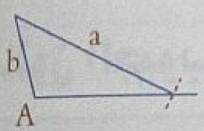
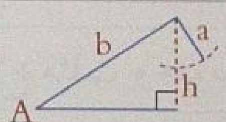
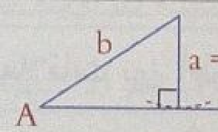
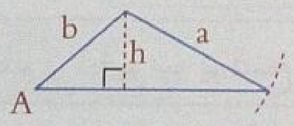
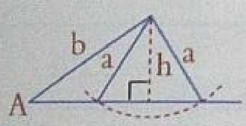
حل المثلث بمعلومية قياس زاويتين وطول أحد الأضلاع « حالة AAS أو حالة ASA »	يوجد مثلث وحيد وحل واحد فقط
حل المثلث بمعلومية طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما « حالة SSA »	

عدد المثلثات	صفر	1	2
عدد الحلول	لا يوجد حل	حل واحد	حلان

المثلثات الممكنة في حالة SSA

تحديد عدد المثلثات الممكنة في حالة SSA

ليكن مثلثًا معلوم فيه: $m\angle A$, a , b ..

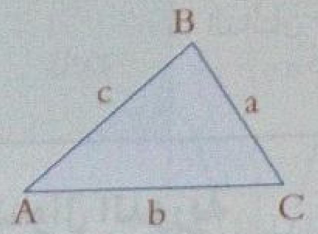
أولاً: الزاوية A منفرجة أو قائمة	$a \le b$: لا يوجد حل للمثلث		$a > b$: يوجد حل واحد للمثلث	
ثانيًا: الزاوية A حادة	$a < h$ لا يوجد للمثلث حل 	$a = h$ يوجد للمثلث حل واحد 	$a \ge b$ يوجد للمثلث حل واحد 	$h < a < b$ يوجد للمثلث حلان 

تنبيهان

- الحالة التي يكون للمثلث فيها حلان تُسمى الحالة المبهمة.
- لإيجاد ارتفاع المثلث h في المثلثات الحادة الزوايا نستخدم العلاقة $h = b \sin A$.

قانون جيوب التمام

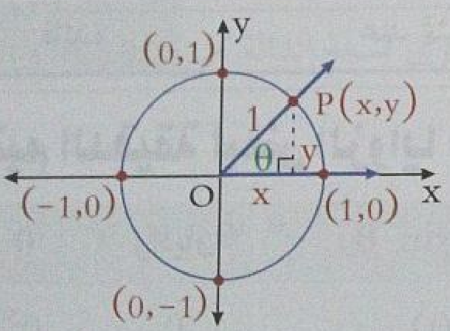
استخداماته	• حل المثلث المعلوم فيه طولا ضلعين وقياس زاوية محصورة بينهما « حالة SAS ». • حل المثلث المعلوم فيه أطوال الأضلاع الثلاثة « حالة SSS ».

قانون جيوب التمام	إذا كانت أضلاع ΔABC التي أطوالها a , b , c تقابل الزوايا ذات القياسات A , B , C على الترتيب فإن .. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ 

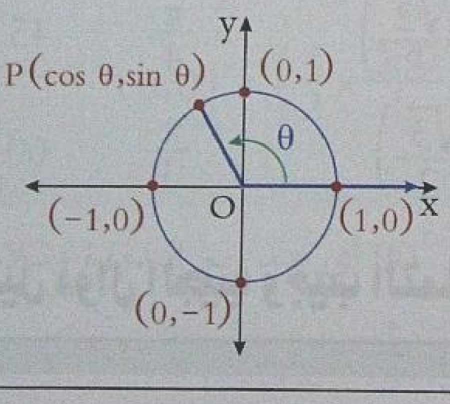
طرق حل المثلثات غير القائمة الزاوية

المعطيات	القانون الذي يُستخدم في الحل
قياسا زاويتين وطول أي ضلع	قانون الجيوب
طولا ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما	قانون الجيوب
طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما	قانون جيوب التمام
أطوال الأضلاع الثلاثة	قانون جيوب التمام

الدوال الدائرية

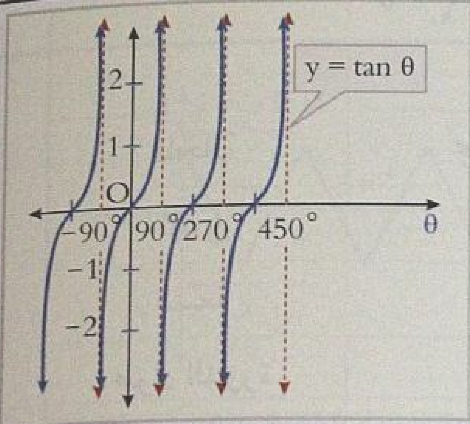
دائرة الوحدة	{ دائرة مرسومة في المستوى الإحداثي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها وحدة واحدة }	
فائدة	إذا كانت النقطة P على دائرة الوحدة فإن دالتا الجيب وجيب التمام .. $\cos\theta = x$ ، $\sin\theta = y$	

الدوال الدائرية في دائرة الوحدة

التعبير اللفظي	إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $P(x,y)$ فإن .. $\cos\theta = x \quad , \quad \sin\theta = y$	
التعبير بالرموز	$P(x,y) = P(\cos\theta, \sin\theta)$	

التردد	• المقصود به: عدد الدورات في وحدة الزمن. • إيجاد تردد التمثيل البياني لدالة: نُوجد مقلوب طول الدورة. • مثال توضيحي: إذا كان طول الدورة لدالة $\frac{1}{70}$ ثانية فإن ترددها يساوي 70 دورة/ثانية.

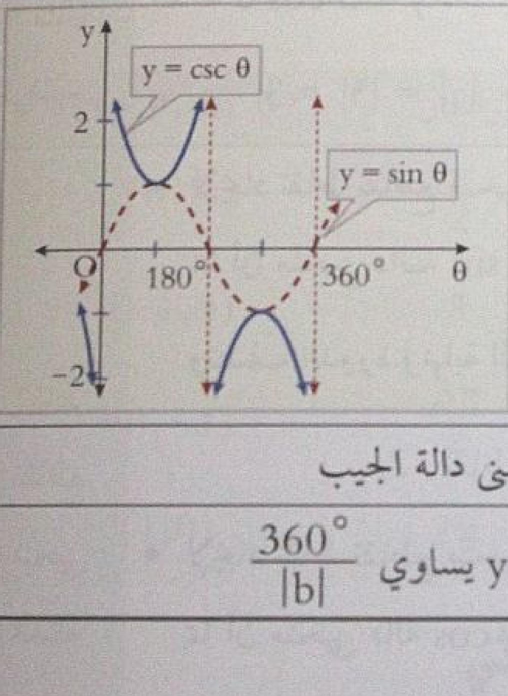
تمثيل دالة الظل في المستوى الإحداثي



دالة الظل	الدالة المولدة « الأم »	$y = \tan \theta$
	المجال	$\{ \theta \mid \theta \neq 90+180n \ , n \in z \}$
	المدى	مجموعة الأعداد الحقيقية
	السعة	غير معرَّفة
	طول الدورة	180°

تنبيهات	• طول الدورة لمنحنى الدالة $y = a \tan b\theta$ يساوي $\frac{180^\circ}{\lvert b\rvert}$. • لا يوجد سعة لدالة الظل لعدم وجود قيم عظمى أو صغرى لها. • دالة الظل لها خطوط تقارب رأسية عند المضاعفات الفردية للعدد $\frac{180^\circ}{2\lvert b\rvert}$.

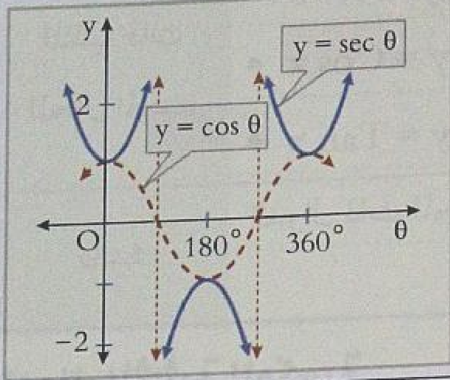
تمثيل دالة قاطع التمام



دالة قاطع التمام	الدالة المولدة « الأم »	$y = \csc \theta$
	المجال	$\{ \theta \mid \theta \neq 180n \ , n \in z \}$
	المدى	$\{ y \mid 1 \leq y$ أو $y \leq -1 \}$
	السعة	غير معرَّفة
	طول الدورة	360°
فائدة	منحنى دالة قاطع التمام يرتبط بمنحنى دالة الجيب	
تنبيه	طول الدورة لمنحنى الدالة $y = a \csc b\theta$ يساوي $\frac{360^\circ}{\lvert b\rvert}$	

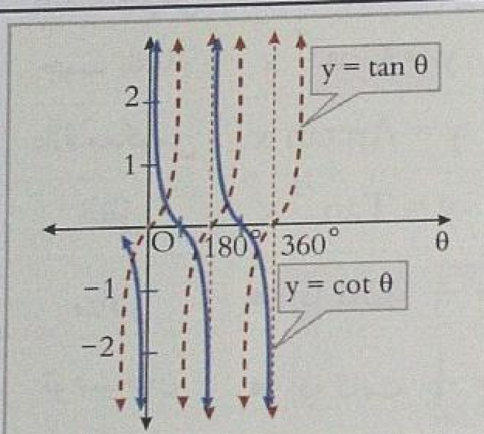
تمثيل دالة القاطع

دالة القاطع	الدالة المولدة « الأم »	$y = \sec \theta$
	المجال	$\{ \theta \mid \theta \neq 90 + 180n \text{ , } n \in z \}$
	المدى	$\{ y \mid 1 \leq y$ أو $y \leq -1 \}$
	السعة	غير معرَّفة
	طول الدورة	360°
مثال	الدالة $y = 3 \sec 4\theta$ ؛ طول دورتها $= \frac{360^\circ}{\lvert b \rvert} = \frac{360^\circ}{\lvert 4 \rvert} = 90^\circ$	
فائدة	منحنى دالة القاطع يرتبط بمنحنى دالة جيب التمام	



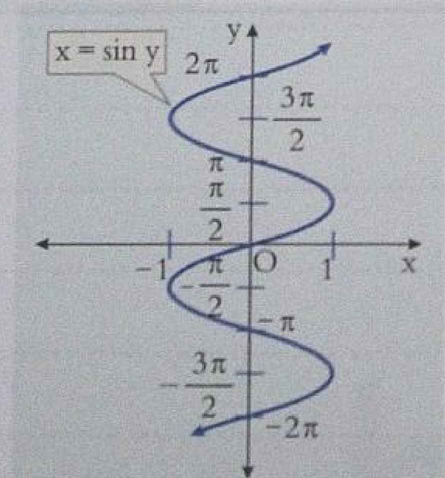
تمثيل دالة ظل التمام

دالة القاطع	الدالة المولدة « الأم »	$y = \cot \theta$
	المجال	$\{ \theta \mid \theta \neq 180n \text{ , } n \in z \}$
	المدى	مجموعة الأعداد الحقيقية
	السعة	غير معرَّفة
	طول الدورة	180°
مثال	الدالة $y = 5 \cot 2\theta$ ؛ طول دورتها $= \frac{180^\circ}{\lvert b \rvert} = \frac{180^\circ}{\lvert 2 \rvert} = 90^\circ$	
فائدة	منحنى دالة ظل التمام يرتبط بمنحنى دالة الظل	



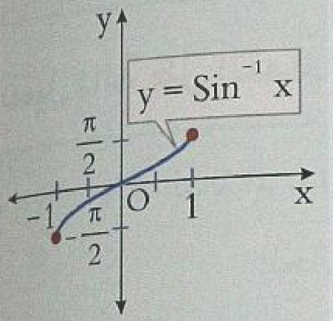
معكوس الدالة المثلثية

المقصود بها	العلاقة التي تُعكس فيها قيم المتغيرين x , y
مثال توضيحي	• معكوس $y = \sin x$ هو $x = \sin y$. • تنبيه: معكوس الدالة المثلثية ليس دالة لوجود عدد من قيم y لكل قيمة من قيم x . • معكوس الدالة المثلثية يصبح دالة إذا تم تحديد مجال الدالة بحيث يكون $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. • القيم الأساسية هي القيم في المجال المحدد.



تمثيل الدوال المثلثية ذات المجال المحدد	الدوال المثلثية ذات المجال المحدد تمثل بأحرف كبيرة كما يلي: • $y = \text{Sin } x$ إذا وفقط إذا كان $y = \sin x$ ؛ $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$. • $y = \text{Cos } x$ إذا وفقط إذا كان $y = \cos x$ ؛ $0 \le x \le \pi$. • $y = \text{Tan } x$ إذا وفقط إذا كان $y = \tan x$ ؛ $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.
فائدة	الدوال ذات المجالات المحددة تُستعمل لتعريف الدوال العكسية « دالة معكوس الجيب ، دالة معكوس جيب التمام ، دالة معكوس الظل »

الدوال المثلثية العكسية

الدالة	الرموز	المجال	المدى	نموذج
دالة معكوس الجيب	$y = \text{Arcsin } x$ $y = \text{Sin}^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ $-90^\circ \le y \le 90^\circ$	
دالة معكوس جيب التمام	$y = \text{Arccos } x$ $y = \text{Cos}^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$0 \le y \le \pi$ $0^\circ \le y \le 180^\circ$	
دالة معكوس الظل	$y = \text{Arctan } x$ $y = \text{Tan}^{-1} x$	مجموعة الأعداد الطبيعية	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ $-90^\circ \le y \le 90^\circ$	
مثالان توضيحيان	• إذا كانت $x = \frac{1}{2}$ في **الدالة** $y = \text{Cos}^{-1} x$ فإن $y = 60^\circ$ فقط لأنها دالة. • إذا كانت $x = \frac{1}{2}$ في **العلاقة** $y = \cos^{-1} x$ فإن $y = 60^\circ , 300^\circ$ لأنها علاقة.			

حل المعادلات باستخدام الدوال العكسية

المقصود بها	إعادة كتابة المعادلات المثلثية لإيجاد قياس الزاوية
مثال توضيحي	$\text{Sin } \theta = -0.35 \Rightarrow \text{Arcsin } (-0.35) = \theta$ أو $\text{Sin } \theta = -0.35 \Rightarrow \text{Sin}^{-1} (-0.35) = \theta$