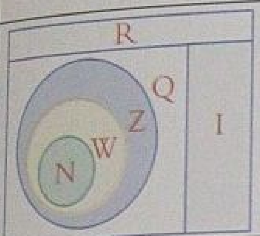
الفصل الأول: الدوال والمتباينات

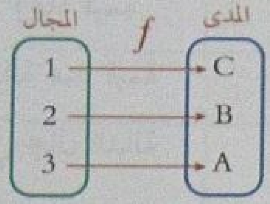
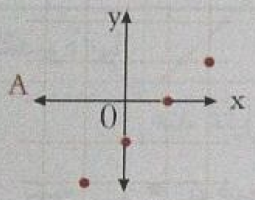
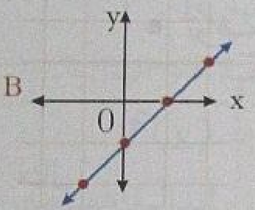
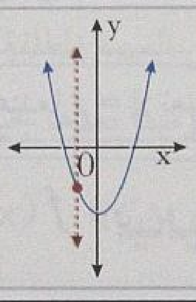
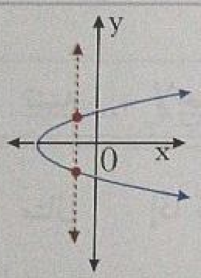
الأعداد الحقيقية

تعريفها	{ مجموعات مختلفة من الأعداد }	رمزها R
الأعداد النسبية (Q)	• المقصود بها: الأعداد التي يمكن كتابتها على الصورة $\frac{a}{b}$ ؛ حيث a , b عددان صحيحان و $b \neq 0$. • أمثلة على الأعداد النسبية: $\frac{2}{3} = 0.666...$ ، $-\frac{7}{8}$ ، 0.123 .	
تنبيه	الصورة العشرية للعدد النسبي إما أن تكون عددًا عشريًا منتهيًا أو دوريًا	
الأعداد غير النسبية (I)	• المقصود بها: الأعداد التي صورتها العشرية ليست منتهية وليست دورية. • أمثلة على الأعداد غير النسبية: $\sqrt{3} = 1.7305...$ ، $\pi = 3.14159...$.	
الأعداد الصحيحة (Z)	$\{ ... , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , ... \}$	
الأعداد الكلية (W)	$\{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , ... \}$	
الأعداد الطبيعية (N)	$\{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , ... \}$	
فائدة	مجموعات الأعداد الصحيحة والكلية والطبيعية كل منها مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد النسبية؛ لأن كل عدد صحيح n يمكن كتابته على الصورة $\frac{n}{1}$	

خصائص الأعداد الحقيقية

الخاصية	الجمع	الضرب
التبديلية	$a+b = b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$
التجميعية	$(a+b)+c = a+(b+c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
العنصر المحايد	$a+0 = a = a+0$	$a \cdot 1 = a = a \cdot 1$
النظير	$a+(-a) = 0 = (-a)+a$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \cdot a \ , a \neq 0$
الانغلاق	$a+b$ عدد حقيقي	$a \cdot b$ عدد حقيقي
التوزيع	• $a(b+c) = ab+ac$ ، وتسمى خاصية التوزيع من اليمين. • $(b+c)a = ba+ca$ ، وتسمى خاصية التوزيع من اليسار.	
تنبيهات	الأعداد a , b , c أعدادًا حقيقية ، إشارة النظير الجمعي لعدد عكس إشارة العدد ، إشارة النظير الضربي لعدد نفس إشارة العدد	

العلاقات والدوال

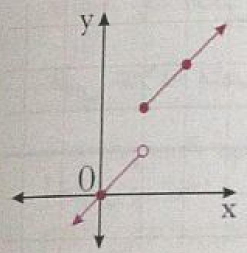
الدالة	{ علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد في المدى }	
الدالة المتباينة	• هي دالة لا يرتبط أكثر من عنصر في المجال بالعنصر نفسه في المدى. • **مثال توضيحي:** في الشكل المجاور الدالة f متباينة .. **المجال** = $\{1 , 2 , 3\}$ ، **المدى** = $\{A , B , C\}$	
فائدتان	• في الدالة المتباينة يرتبط كل عنصر من المجال بعنصر واحد فقط في المدى. • من الممكن كتابة الدالة f بالشكل $f = \{(1,C) , (2,B) , (3,A)\}$.	
العلاقتان المنفصلة والمتصلة	• **العلاقة المنفصلة:** علاقة مجالها مجموعة من النقاط المنفردة؛ مثل العلاقة A في الشكل المجاور. • **العلاقة المتصلة:** علاقة مجالها عدد لانهائي من العناصر ويمكن تمثيلها بمستقيم أو بمنحنٍ متصل؛ مثل العلاقة B في الشكل المجاور. **فائدة:** إذا أمكن تمثيل العلاقة بيانيًا دون رفع رأس القلم عن الورقة فهي علاقة متصلة.	 
اختبار الخط الرأسي	اختبار يُستخدم لمعرفة ما إذا كانت العلاقة المنفصلة أو المتصلة دالة أم لا .. إذا لم يقطع أي خط رأسي التمثيل البياني للعلاقة بأكثر من نقطة **فالعلاقة دالة**  إذا قطع خط رأسي التمثيل البياني للعلاقة في نقطتين أو أكثر **فالعلاقة ليست دالة** 	

معادلات العلاقات والدوال

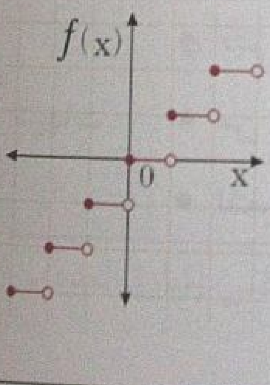
المقصود بها	معادلات تمثل العلاقة بين المتغيرين x , y
أمثلة توضيحية	$y = x+1$ و $y = \frac{1}{2}x-3$ و $y = 3x^2$
تنبيهات	• قِيم المتغيرين x , y التي تحقق المعادلة تُكتب على شكل زوج مرتب (x,y) . • من خلال التمثيل البياني للمعادلة يمكن تحديد إن كانت المعادلة تمثل دالة أم لا. • المتغير x « من المجال » يدعى المتغير المستقل، أما المتغير y « من المدى » فيدعى المتغير التابع.

إيجاد قيمة دالة عند قيمة في مجال الدالة	إذا كانت المعادلة تمثل دالة فيمكننا أن نرمز لها بأحد الرموز $f(x) = y$ أو $g(x) = y$ أو $h(x) = y$ أو ...	المعادلة $y = x+1$ يمكن كتابتها على الشكل $f(x) = x+1$
	لإيجاد قيمة $f(a)$ « حيث a من المجال » نعوض بقيمة a عن x في المعادلة $f(x) = y$	إذا كانت $f(x) = x+1$ فإن .. $f(3) = 3+1 = 4$ $f(b) = b+1$

الدالة متعددة التعريف

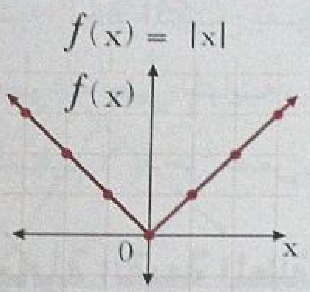
المقصود بها	دالة تُكتب باستعمال عبارتين أو أكثر
تنبيه	عند تمثيل الدالة متعددة التعريف بيانيًا .. • توضع دائرة صغيرة مظللة عند الطرف لتشير إلى أن النقطة تنتمي للتمثيل البياني. • توضع دائرة صغيرة غير مظللة لتشير إلى أن النقطة لا تنتمي للتمثيل البياني.
مثال توضيحي	الدالة $f(x) = \begin{cases} x+1 , & x \geq 1 \\ x , & x < 1 \end{cases}$ التمثيل البياني 
تنبيه	لإيجاد قيمة دالة معرفة بأكثر من قاعدة عندما $x = a$ نعوض بقيمة a عن x في القاعدة التي تنتمي لها a
مثال توضيحي	إذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2x+1 , & x \geq 3 \\ -2x , & x < 3 \end{cases}$ فإن .. $f(4) = 2(4)+1 = 9 \quad , \quad f(1) = -2(1) = -2$

الدالة الدرجية

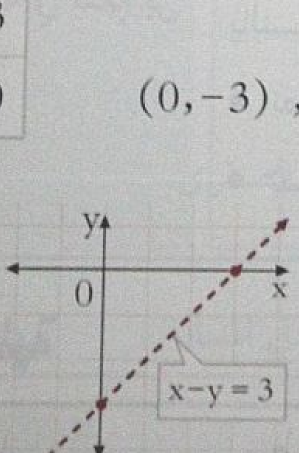
المقصود بها	دالة تمثيلها البياني يتكون من قطع مستقيمة أفقية	$f(x) = [x]$ 
التوضيح بالرموز	$f(x) = [\![x]\!]$ وتقرأ دالة أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x	
مثال توضيحي	إذا كانت $f(x) = [\![x]\!]$ فإن .. $f(3.25) = [\![3.25]\!] = 3$ $f(-4.6) = [\![-4,6]\!] = -5$	

المجال والمدى	• مجال الدالة الدرجية = مجموعة الأعداد الحقيقية R . • مدى الدالة الدرجية = مجموعة الأعداد الصحيحة Z .
تنبيه	إذا كانت $x \in [a,a+1)$ فإن $[\![x]\!] = a$
فائدة	العبارة $x \in [a,b)$ تكافئ العبارة $a \le x < b$

دالة القيمة المطلقة

<table>
<tr><td>رمزها</td><td>$f(x) = |x|$ وتُقرأ القيمة المطلقة للعدد x</td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>قاعدتها</td><td>$$f(x) = \begin{cases} x & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$</td></tr>
<tr><td>فائدة</td><td>التمثيل البياني لدالة القيمة المطلقة يكون على الشكل V ،
وإذا سبقتها إشارة سالبة تكون على الشكل Λ</td></tr>
<tr><td>تنبيهات</td><td colspan="2">• مجال دالة القيمة المطلقة $f(x) = |x|$ مجموعة الأعداد الحقيقية R .
• مدى دالة القيمة المطلقة $f(x) = |x|$ مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة.
• لا يمكن أن تكون دالة القيمة المطلقة سالبة، أي أن $f(x) = |x| \ge 0$.
• المقطعان هما $f(x) = 0$ و $x = 0$ ، « أي أن التمثيل البياني للدالة يتقاطع مع محور x عندما $y = 0$ و يتقاطع مع محور y عندما $x = 0$ » .</td></tr>
<tr><td>خطوات تحديد قيم x للتمثيل البياني</td><td colspan="2">(1) نساوي ما بداخل القيمة المطلقة بالصفر ونُحدد قيمة x .
(2) نختار قيماً قبلها وقيماً بعدها بحيث تقع القيمة التي حصلنا عليها في المنتصف.</td></tr>
</table>

خطوات تمثيل المتباينات الخطية بيانيًا

<table>
<tr><th>الخطوة</th><th>مثال توضيحي: تمثيل المتباينة $x-y < 3$ بيانيًا</th></tr>
<tr><td>نضع علامة « = » بدلاً من علامة التباين</td><td>نكتب المعادلة: $x-y = 3$</td></tr>
<tr><td>نعوض عن x بـ 0 ونحسب y ، ثم نعوض عن y بـ 0 ونحسب x ، فنحصل على النقطتين ..
$(0,y_1)$, $(x_2,0)$</td><td>النقطتان هما ..
$(0,-3)$, $(3,0)$
<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>3</td></tr><tr><td>y</td><td>−3</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>نرسم على المستوى الإحداثي مستقيمًا يمر بالنقطتين،
ولدينا احتمالان ..
• علامة التباين > أو < : نرسم المستقيم متقطعًا.
• علامة التباين ≤ أو ≥ : نرسم المستقيم متصلاً.</td><td>
</td></tr>
</table>

المستقيم الذي رسمناه يقسم المستوى الإحداثي إلى نصفين؛ نختار نقطة من أحد النصفين ثم نعوض بها في المتباينة المعطاة، ولدينا - هنا - احتمالان ..

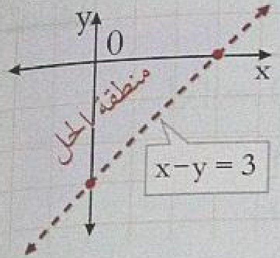
- **النقطة تحقق المتباينة:** حل المتباينة هو النصف الذي تقع فيه النقطة.
- **النقطة لا تحقق المتباينة:** حل المتباينة هو النصف الآخر.

تنبيه: الخط المتصل يعني أن المستقيم يدخل ضمن مجموعة حل المتباينة، أما الخط المتقطع فيعني أن المستقيم لا يدخل ضمن مجموعة الحل.

نختار النقطة $(0,0)$ ..

$$0-0 \overset{?}{<} 3 \Rightarrow 0<3 \checkmark$$

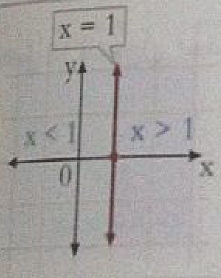
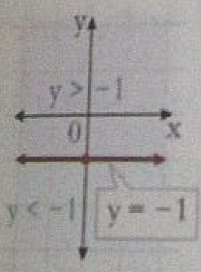
$\therefore$ النقطة $(0,0)$ تحقق المتباينة مما يعني أن حل المتباينة هو النصف الذي تقع فيه النقطة



متباينة القيمة المطلقة من الدرجة الأولى في متغيرين

المقصود بها	متباينة تحوي المتغيرين x , y وعلامة القيمة المطلقة
أمثلة توضيحية	$y>\|3x\|$, $y \geq 2\|x-1\|$, $y \leq 2\|x\|+3$
طريقة تمثيلها بيانيًا	تُمثل بنفس طريقة تمثيل المتباينات الخطية

حل نظام المتباينات الخطية في متغيرين

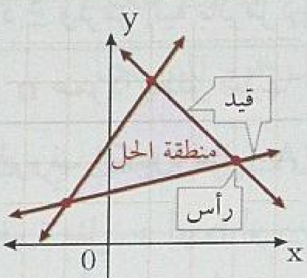
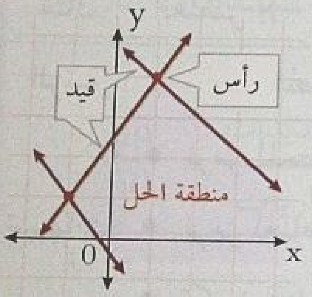
مجموعة حل نظام متباينات خطية في متغيرين	إذا فرضنا نظامًا يتكون من متباينتين فأكثر فإن .. مجموعة حل النظام = تقاطع مجموعات حلول متبايناته	
مجموعة حل بعض المتباينات الخطية في متغيرين	بالنسبة للمستقيم $x=a$ ، a ثابت ، فإن .. • نصف المستوى يمينه يُمثل حل المتباينة $x>a$. • نصف المستوى يساره يُمثل حل المتباينة $x<a$.	
	بالنسبة للمستقيم $y=a$ ، a ثابت ، فإن .. • نصف المستوى فوقه يمثل حل المتباينة $y>a$. • نصف المستوى تحته يمثل حل المتباينة $y<a$.	

البرمجة الخطية

المقصود بها	طريقة لإيجاد القيمة العظمى أو الصغرى لدالة تحت قيود معينة

القيود	متباينات النظام
رؤوس منطقة الحل	نقاط تقاطع الخطوط التي تحدد منطقة الحل
تنبيهان	• القيم العظمى أو الصغرى تحدث دائمًا عند أحد رؤوس منطقة الحل. • يستعمل الرمز $f(x,y)$ للتعبير عن الدالة في المتغيرين x,y .

منطقتا الحل المحدودة وغير المحدودة

منطقة الحل المحدودة		منطقة الحل غير المحدودة	
تكون منطقة الحل محصورة بقيود وتظهر القيمة العظمى أو الصغرى للدالة عادة عند أحد رؤوس منطقة الحل		تكون منطقة الحل مفتوحة وممتدة ويمكن أن تحوي قيمة عظمى أو قيمة صغرى	

خطوات إيجاد القيمة العظمى أو الصغرى لدالة معطاة بقيود معينة

(1)	نُمثل المتباينات « القيود » بيانيًا ونُحدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل
(2)	نوجد قيمة الدالة عند كل رأس وتكون .. • القيمة العظمى هي أعلى قيمة للدالة. • القيمة الصغرى هي أصغر قيمة للدالة.

البرمجة الخطية والحل الأمثل

المقصود بها	استعمال البرمجة الخطية للحصول على السعر أو الكمية الأفضل أو الأنسب لتقليل التكلفة أو زيادة الربح
خطوات إيجاد الحل الأمثل	(1) نُحدد المتغيرات. (2) نكتب نظامًا للمتباينات الخطية التي تمثل المسألة. (3) نُمثل نظام المتباينات بيانيًا. (4) نُوجد إحداثيات رؤوس منطقة الحل. (5) نكتب الدالة الخطية التي نريد إيجاد قيمتها العظمى أو الصغرى. (6) نُوجد قيمة الدالة عند رؤوس منطقة الحل. (7) نختار القيمة العظمى أو الصغرى وفقًا لما هو مطلوب في المسألة.

الفصل الثاني: المصفوفات

المصفوفة

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & -2 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & -3 & 6 \\ 7 & -8 & 1 & 4 \end{bmatrix}}_{\text{4 أعمدة}} \left.\vphantom{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}}\right\} \text{3 صفوف}$$

المقصود بها	ترتيب على هيئة مستطيل لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية محصورة بين قوسين
العنصر	{ كل قيمة في المصفوفة }
مثال	العنصر -8 موجود في الصف 3 والعمود 2 ونرمز إليه بالرمز a_{32}
الرتبة	المصفوفة المكونة من m صفًا و n عمودًا يطلق عليها مصفوفة من الرتبة $m \times n$
تنبيهات	• نرمز للمصفوفة ـ عادةً ـ باستعمال الحروف الكبيرة مثل: A أو B أو ⋯ . • نرمز لعناصر المصفوفة بالأحرف الصغيرة مثل: a أو b أو ⋯ . • تكون عناصر المصفوفة عبارة عن أعداد أو رموز أو أعداد ورموز معًا.

أنواع المصفوفات وتساوي مصفوفتين

مصفوفة الصف	مصفوفة العمود	المصفوفة المربعة	المصفوفة الصفرية
تحوي صفًا واحدًا	تحوي عمودًا واحدًا	عدد الصفوف فيها يساوي عدد الأعمدة	جميع عناصرها أصفار
$A = \begin{bmatrix} 8 & -5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$	$C = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$	$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

تساوي مصفوفتين	تتساوى مصفوفتان إذا كانتا من الرتبة نفسها، وتساوت عناصرهما المتناظرة تنبيه: العناصر المتناظرة تعني العناصر التي تقع بالضبط في الموقع نفسه من كل مصفوفة.	$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

تنظيم وتحليل البيانات بالمصفوفات

تنظيم البيانات في مصفوفة	وضع البيانات في مصفوفة على هيئة صفوف وأعمده بترتيب معين
تحليل البيانات باستعمال المصفوفة	الحصول على معلومات ذات معنى أو بدون معنى من مجاميع عناصر الصفوف أو الأعمدة بعد تنظيم البيانات في مصفوفة

مثال توضيحي	المصفوفة التالية تمثل انجازات ثلاثة لاعبين في المباراة من حيث الأهداف وقطع الكرة والتمريرات والتسديدات والمباريات: $$\begin{array}{c|ccccc} & \text{الأهداف} & \text{قطع الكرة} & \text{التمريرات} & \text{التسديدات} & \text{المباريات} \\ \hline \text{ماجد} & 11 & 40 & 170 & 43 & 18 \\ \text{معاذ} & 4 & 30 & 20 & 31 & 20 \\ \text{ياسر} & 4 & 15 & 113 & 24 & 12 \end{array}$$ • مجموع عناصر العمود 1 = 50 ويمثل العدد الكلي لمباريات اللاعبين. • مجموع عناصر العمود 2 = 98 ويمثل العدد الكلي لتسديدات اللاعبين خلال جميع المباريات. • معدل تسديد اللاعب في المباراة الواحدة = $\frac{\text{مجموع التسديدات}}{\text{مجموع المباريات}} = \frac{98}{50}$.

جمع المصفوفات وطرحها وضربها في عدد ثابت

جمع المصفوفات وطرحها	إذا كانت A ، B مصفوفتين من الرتبة $m\times n$ فإن .. $A+B$ هي مصفوفة أيضًا من الرتبة $m\times n$ يكون كل عنصر فيها هو مجموع العنصرين المتناظرين في A ، B وكذلك $A-B$ هي مصفوفة من الرتبة $m\times n$ أيضًا
طريقة جمع المصفوفات وطرحها	$A+B=A+B$: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$ $A-B=A-B$: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$ **تنبيه**: عند جمع أو طرح المصفوفات لابد أن تكون لها نفس الرتبة.
مثال توضيحي	$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -9 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & -5+0 \\ 1+(-9) & 7+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$
ضرب مصفوفة بعدد ثابت	حاصل ضرب مصفوفة A من الرتبة $m\times n$ في عدد ثابت k هي مصفوفة kA من الرتبة $m\times n$ وكل عنصر فيها يساوي العنصر المناظر له في المصفوفة A مضروبًا بالعدد الثابت k $k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$ ، $k\cdot A = kA$ $-3\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(4) & -3(1) \\ -3(7) & -3(-2) \end{bmatrix}$
خصائص جمع المصفوفات	الخاصية الإبدالية: $A+B=B+A$ الخاصية التجميعية: $(A+B)+C=A+(B+C)$ خاصية التوزيع للضرب في عدد ثابت: $k(A+B)=kA+kB$ A ، B ، C ثلاث مصفوفات لها الرتبة نفسها و k عدد ثابت لا يساوي الصفر

ضرب المصفوفات

شرط الضرب	يمكن ضرب مصفوفتين إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة الأولى مساويًا لعدد صفوف الثانية عملية ضرب يمكن إجراؤها: $\underset{m\times r}{A}\cdot\underset{r\times t}{B}$ ، $r = r$ عملية ضرب لا يمكن إجراؤها: $\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{r\times t}{B}$ ، $n \neq r$
حاصل الضرب	حاصل ضرب مصفوفة بأخرى هو مصفوفة عدد صفوفها يساوي عدد صفوف المصفوفة الأولى وعدد أعمدتها يساوي عدد أعمدة المصفوفة الثانية
مثال توضيحي	$A_{m\times r}\cdot B_{r\times t} = AB_{m\times t}$ رتبة AB ناتج الضرب مصفوفة من النوع $m\times t$
كيف نضرب مصفوفتين؟	نضرب عناصر صفوف الأولى في عناصر أعمدة الثانية بالترتيب ثم نجمع النواتج؛ فمثلاً .. $\underset{A}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}\underset{B}{\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}} = \underset{AB}{\begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}}$
تنبيه	إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ فإن $A^2 \neq \begin{bmatrix} a^2 & b^2 \\ c^2 & d^2 \end{bmatrix}$
خصائص ضرب المصفوفات	خاصية التجميع لضرب المصفوفات: $(AB)C = A(BC)$ خاصية التجميع لضرب المصفوفات في عدد: $k(AB) = (kA)B = A(kB)$ خاصية التوزيع من اليسار للمصفوفات: $C(A+B) = CA+CB$ خاصية التوزيع من اليمين للمصفوفات: $(A+B)C = AC+BC$ **تنبيه:** الخصائص السابقة صحيحة لأي ثلاث مصفوفات A ، B ، C ولأي عدد k ؛ على أن يكون ناتج ضرب أو جمع أي منها معرَّفًا. **فائدة:** نرمز لضرب مصفوفتين A ، B بالضرب $A\cdot B$ أو AB .

المحددات

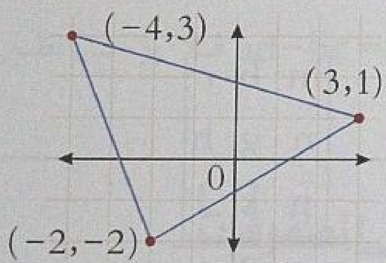
المحددة	• المقصود بها: إذا كانت المصفوفة A مربعة فإن لها محددة ويرمز لها بالرمز $\|A\|$. • مثال توضيحي: إذا كانت المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ فإن $\|A\| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$.
محددة الدرجة الثانية	• المقصود بها: محددة مصفوفة من النوع 2×2 . • قيمتها: قيمة محددة الدرجة الثانية يساوي حاصل ضرب عنصري القطر الرئيسي مطروحًا منه حاصل ضرب عنصري القطر الآخر. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-cb$ القطر الرئيسي

مثال توضيحي	$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 4(6)-(-3)(5) = 24+15 = 39$

محددة الدرجة الثالثة

المقصود بها	محددة مصفوفة من النوع 3×3
طريقة حساب قيمة المحددة بقاعدة الأقطار	(1) نُعيد كتابة العمود الأول والثاني إلى يمين المحددة. (2) نُوجد حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة، ثم نجمع. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$ (3) نُوجد حاصل ضرب عناصر القطر الآخر وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة، ثم نجمع. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$ (4) لإيجاد قيمة المحددة نطرح ناتج الخطوة (3) من ناتج الخطوة (2) .

حساب مساحة المثلث باستعمال المحددات

القاعدة	مثال توضيحي
مساحة مثلث إحداثيات رؤوسه (a,b) ، (c,d) ، (e,f) تساوي $\|A\|$ حيث .. $A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$	 $A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$
تنبيه	نستعمل القيمة المطلقة $\|A\|$ للمقدار A حتى نضمن أن مساحة المثلث غير سالبة

قاعدة كرامر

المقصود بها	طريقة لحل أنظمة المعادلات الخطية
التوضيح بالرموز	إذا كانت C محددة مصفوفة المعاملات للنظام $\begin{matrix} ax+by = m \\ fx+gy = n \end{matrix}$ ، حيث $C = \begin{vmatrix} a & b \\ f & g \end{vmatrix}$ فإن حل هذا النظام هو .. $x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{\|C\|}$ و $y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{\|C\|}$ ، إذا كانت $C \neq 0$

مثال توضيحي	حل نظام المعادلتين $\begin{matrix} 6x+4y=10 \\ 2x+7y=22 \end{matrix}$ باستخدام قاعدة كرامر .. $x=\dfrac{\begin{vmatrix}10 & 4\\ 22 & -7\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}6 & 4\\ 2 & -7\end{vmatrix}}=\dfrac{79}{25}$ ، $y=\dfrac{\begin{vmatrix}6 & 10\\ 2 & 22\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}6 & 4\\ 2 & -7\end{vmatrix}}=-\dfrac{56}{25}$ $\therefore$ حل النظام $\left(\dfrac{79}{25},-\dfrac{56}{25}\right)$
تنبيهات	• يجب ترتيب النظام قبل إيجاد مصفوفة المعاملات C إن لم يكن مرتبًا. • يكون للنظام حل وحيد إذا كانت قيمة $\lvert C\rvert$ لا تساوي صفراً. • لا يكون للنظام حل وحيد إذا كانت قيمة $\lvert C\rvert$ تساوي صفراً. • للتحقق من الحل نعوض بالقيم في المعادلات الأصلية.

استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات

إذا كانت C محددة مصفوفة المعاملات للنظام $\begin{matrix} ax+by+cz=m \\ fx+gy+hz=n \\ jx+ky+lz=p \end{matrix}$ ؛ حيث $C=\begin{vmatrix}a & b & c\\ f & g & h\\ j & k & l\end{vmatrix}$ فإن حل النظام ..

$$x=\frac{\begin{vmatrix}m & b & c\\ n & g & h\\ p & k & l\end{vmatrix}}{|C|} \text{ ، } y=\frac{\begin{vmatrix}a & m & c\\ f & n & h\\ j & p & l\end{vmatrix}}{|C|} \text{ ، } z=\frac{\begin{vmatrix}a & b & m\\ f & g & n\\ j & k & p\end{vmatrix}}{|C|} \text{ ، حيث } C\neq 0$$

مثال توضيحي: حل النظام $\begin{matrix} 3x+5y+2z=-7 \\ -4x+3y-5z=-19 \\ 5x+4y-7z=-15 \end{matrix}$ باستخدام قاعدة كرامر ..

$$C=\begin{vmatrix}3 & 5 & 2\\ -4 & 3 & -5\\ 5 & 4 & -7\end{vmatrix}=-330$$

إيجاد قيمة z	إيجاد قيمة y	إيجاد قيمة x
$z=\dfrac{\begin{vmatrix}3 & 5 & -7\\ -4 & 3 & -19\\ 5 & 4 & -15\end{vmatrix}}{\lvert C\rvert}=\dfrac{31}{22}$	$y=\dfrac{\begin{vmatrix}3 & -7 & 2\\ -4 & -19 & -5\\ 5 & -15 & -7\end{vmatrix}}{\lvert C\rvert}=\dfrac{57}{22}$	$x=\dfrac{\begin{vmatrix}-7 & 5 & 2\\ -19 & 3 & -5\\ -15 & 4 & -7\end{vmatrix}}{\lvert C\rvert}=\dfrac{23}{22}$

$\therefore$ حل النظام هو $\left(\dfrac{23}{22},-\dfrac{57}{22},\dfrac{31}{22}\right)$

النظير الضربي للمصفوفة

مصفوفة الوحدة	مصفوفة مربعة عناصر قطرها الرئيسي 1 وباقي عناصرها أصفار ويرمز لها بالرمز I
مثال توضيحي	مصفوفة وحدة من نوع 2×2 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ — مصفوفة وحدة من نوع 3×3 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
المصفوفة المحايدة لعملية الضرب	مصفوفة الوحدة I التي إذا ضربت في أي مصفوفة مربعة لها نفس الرتبة تعطى نفس المصفوفة
مثال توضيحي	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
النظير الضربي لمصفوفة	• إذا كانت المصفوفتان B ، A مربعتين ولهما الرتبة نفسها، وكان $AB = BA = I$ فإن المصفوفة A والمصفوفة B كلاً منهما تُسمى نظيراً ضربيًا للأخرى. • نرمز للنظير الضربي للمصفوفة A بالرمز A^{-1} ، حيث $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.
قيمة النظير الضربي لمصفوفة من النوع 2×2	إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ فإن نظيرها الضربي ـ إن وجد ـ يعطى من العلاقة التالية: $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ، بشرط أن $ad-bc \neq 0$ تنبيه: إذا كانت قيمة محددة A تساوي صفر، أي أن $ad-bc = 0$ فلا يوجد نظير ضربي للمصفوفة A .

خطوات حل نظام معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين باستعمال المصفوفات

(1) نجعل النظام في الصورة القياسية إن لم يكن كذلك ..
$$\begin{aligned} ax+by &= m \\ fx+gy &= n \end{aligned}$$

(2) نُوجد ثلاث مصفوفات ..

مصفوفة الثوابت	$B = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$	مصفوفة المتغيرات	$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	مصفوفة المعاملات	$A = \begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix}$

(3) نُوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات A ، أي نُوجد A^{-1} .

(4) نكتُب النظام في المعادلة المصفوفية التالية:

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

(5) من حل المعادلة المصفوفية نُوجد قيمة كلٍ من x و y فنحصل على حل نظام معادلتي الدرجة الأولى بمجهولين.

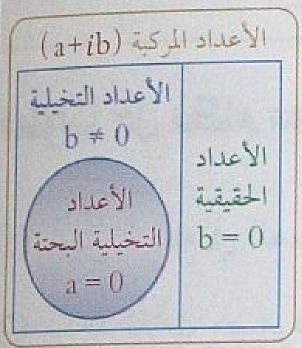
تنبيهان	• تستعمل هذه الطريقة لحل نظام معادلات فقط إذا كان لمصفوفة المعاملات A نظير ضربي. • إذا لم يكن للمصفوفة A نظير ضربي؛ فيمكن أن يكون للنظام عدد لا نهائي من الحلول أو لا يوجد حل.

الوحدة التخيلية (ι)

المقصود بها	المقدار $\sqrt{-1}$ يسمى **الوحدة التخيلية**، ويُرمز له بالرمز ι ؛ أي أن .. $$\iota = \sqrt{-1}$$
قوى الوحدة التخيلية ι	$\iota^1 = \iota$ ، $\iota^2 = -1$ ، $\iota^3 = \iota^2 \times \iota = -\iota$ ، $\iota^4 = (\iota^2)^2 = 1$ $\iota^5 = \iota^4 \times \iota = \iota$ ، $\iota^6 = \iota^4 \times \iota^2 = -1$ ، $\iota^7 = \iota^4 \times \iota^3 = -\iota$ ، $\iota^8 = (\iota^4)^2 = 1$ $\iota^{4n} = 1$ ، حيث n عدد طبيعي — مثال توضيحي: $\iota^{20} = \iota^{4\times5} = 1$ $\iota^{4n+m} = \iota^m$ ، حيث n و m عددان طبيعيان — مثال توضيحي: $\iota^{15} = \iota^{(3\times4)+3} = \iota^3$
فائدة	تُستخدم الوحدة التخيلية ι في تبسيط الجذور التربيعية للأعداد السالبة
مثال	$\sqrt{-20} = \sqrt{20}\sqrt{-1} = \sqrt{4(5)}\sqrt{-1} = 2\sqrt{5}\,\iota$

الأعداد المركبة

تعريفها	{ الأعداد التي يمكن كتابتها على الصورة $a+\iota b$ حيث a , b عددان حقيقيان، ι الوحدة التخيلية }
تنبيهان	في العدد المركب $a+\iota b$ .. • يُسمى a الجزء الحقيقي و b الجزء التخيلي. • مثلاً: في العدد المركب $7+3\iota$ يكون الجزء الحقيقي 7 والتخيلي 3 . • إذا كان $b = 0$ فإن العدد المركب يكون عددًا حقيقيًا؛ أي أن .. أي عدد حقيقي هو عدد مركب جزؤه التخيلي صفر • مثلاً: العدد الحقيقي 4 هوعدد مركب جزءه التخيلي صفر.



الأعداد التخيلية البحتة

المقصود بها	في العدد المركب $a+\iota b$ ؛ إذا كان $a = 0$ فإن العدد ιb يسمى عددًا تخيليًا بحتًا
مثال توضيحي	الأعداد 7ι , -3ι تسمى أعدادًا تخيلية بحتة
فائدة	يُستخدم الجذر التربيعي لحل بعض المعادلات التربيعية التي حلولها أعداد تخيلية بحتة
مثال توضيحي	حَل المعادلة $x^2+9 = 0$ .. $x^2+9=0 \Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-9} \Rightarrow x = \pm 3\iota$

ضرب الأعداد التخيلية البحتة	التعبير الرمزي	$a\iota \times b\iota = (ab)\iota^2 = (ab)(\iota^2) = -ab$
	مثال توضيحي	$3\iota \times 7\iota = (3\times 7)\iota^2 = (21)(-1) = -21$

العمليات على الأعداد المركبة

تساوي عددين مركبين	التعبير اللفظي	يتساوى العددان المركبان إذا تساوى الجزءان الحقيقيان وتساوى الجزءان التخيليان
	التعبير الرمزي	$a+b\iota = c+d\iota$ إذا وفقط إذا $a = c\ ,\ b = d$
مثال توضيحي		إذا كان $3+7\iota = a+b\iota$ فإن $a = 3\ ,\ b = 7$
جمع وطرح الأعداد المركبة		$(a+b\iota)+(c+d\iota) = (a+c)+(b+d)\iota$
		$(a+b\iota)-(c+d\iota) = (a-c)+(b-d)\iota$

ضرب الأعداد المركبة وقسمتها

ضرب عددين مركبين	$(a+b\iota)(c+d\iota) = (ac-bd)+(ad+bc)\iota$
مثال توضيحي لضرب عددين مركبين بالطريقة الرأسية	$(4+2\iota)(2+3\iota) = 8+16\iota+6\iota^2 = 8+16\iota+6(-1) = 8+16\iota-6 = 2+16\iota$ $\begin{array}{r} 4+2\iota \\ \times\ \ 2+3\iota \\ \hline 8+4\iota \\ +\ \ +12\iota+6\iota^2 \\ \hline 8+16\iota+6\iota^2 \end{array}$
العددان المركبان المترافقان	العددان المركبان $a+b\iota\ ,\ a-b\iota$ كلاً منهما يسمى مرافقاً للآخر
أمثلة توضيحية	العدد: $2+5\iota$ ، $1-7\iota$ ، 2ι مرافقه: $2-5\iota$ ، $1+7\iota$ ، -2ι
فائدة	مرافق العدد الحقيقي هو نفسه « مثلاً مرافق العدد 3 هو العدد 3 »
ضرب عدد مركب في مرافقه	ضرب العددين المترافقين يساوي عدد حقيقي .. $(a+b\iota)(a-b\iota) = a^2+b^2$
مثال توضيحي	$(2+5\iota)(2-5\iota) = 2^2+5^2 = 4+25 = 29$
فائدتان على قسمة العددين المركبين	• نستخدم ضرب العددين المترافقين لتبسيط ناتج قسمة عددين مركبين. • لتبسيط ناتج قسمة عددين مركبين نضرب كلاً من البسط والمقام في مرافق المقام.

حل المعادلة التربيعية بالقانون العام

الصورة القياسية للمعادلة التربيعية	$ax^2+bx+c=0$	حيث: a , b , c أعداد نسبية و $a \neq 0$.
القانون العام	$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	حيث: a معامل x^2 ، b معامل x ، c الحد الثابت.
تنبيهان	• يجب وضع المعادلة التربيعية على الصورة القياسية قبل حلها بالقانون العام. • جذور المعادلة تعني حلول المعادلة.	
المميز	المميز للمعادلة التربيعية $ax^2+bx+c=0$ هو ..	المميز $= b^2-4ac$

حالات المميز

قيمة المميز	عدد الجذور وأنواعها
$b^2-4ac>0$ والمقدار b^2-4ac مربع كامل	جذران حقيقيان نسبيان
$b^2-4ac>0$ والمقدار b^2-4ac ليس مربعًا كاملاً	جذران حقيقيان غير نسبيين
$b^2-4ac=0$	جذر حقيقي واحد
$b^2-4ac<0$	جذران مركبان

فائدتان	• إذا وُجد لمعادلة تربيعية جذران مركبان فهما مترافقان. • يمكن كتابة القانون العام على الصورة المجاورة ..	$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\text{المميز}}}{2a}$

وحيدات الحد

المقصود بها	عدد أو متغير أو عبارة ناتجة عن ضرب متغير أو أكثر وأسسها أعداد صحيحة غير سالبة
أمثلة	تسمى كل من العبارات التالية وحيدة حد: 7 , x , $5y^2$, $4x^2y$, $-2n^3m$
تبسيط وحيدة الحد	تكون وحيدة الحد في أبسط صورة عندما تتحقق الشروط التالية: • لا تتضمن قوى القوة. • يظهر كل أساس مرة واحدة. • تكون جميع الكسور المتضمنة في أبسط صورة. • لا تتضمن أسسًا سالبة.
مثالان توضيحيان	• وحيدات حد في أبسط صورة: $-2n^3m$, $4x^2y$, $5y^2$. • وحيدات حد ليست في أبسط صورة: $-2(n^3)^2$, $4x^2xy$, $\frac{8}{6}y^2$.
درجة وحيدة الحد	• هو أس المتغير، أو مجموع أسس متغيرات وحيدة الحد إذا احتوت على أكثر من متغير. • مثالان: $3x^2$ وحيدة حد من الدرجة الثانية ، $5x^3y^2$ وحيدة حد من الدرجة الخامسة.

خصائص الأسس

الخاصية	التعريف	مثال توضيحي
ضرب القوى	$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$	$3^2 \cdot 3^3 = 3^{3+2} = 3^5$, $p^2 \cdot p^9 = p^{2+9} = p^{11}$
قسمة القوى	$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ ؛ $x \neq 0$	$\frac{9^5}{9^2} = 9^{5-2} = 9^3$, $\frac{b^6}{b^4} = b^{6-4} = b^2$
الأس السالب	$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$ ، $\frac{1}{x^{-a}} = x^a$ حيث $x \neq 0$	$3^{-5} = \frac{1}{3^5}$, $\frac{1}{b^{-7}} = b^7$
قوة القوة	$(x^a)^b = x^{ab}$	$(3^3)^2 = 3^{3\times 2} = 3^6$, $(d^2)^4 = d^{2\times 4} = d^8$
قوة ناتج الضرب	$(xy)^a = x^a y^b$	$(2k)^4 = 2^4 k^4 = 16k^4$, $(ab)^3 = a^3 d^3$
قوة ناتج القسمة	$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$ ؛ $y \neq 0$ $\left(\frac{x}{y}\right)^{-a} = \left(\frac{y}{x}\right)^a = \frac{y^a}{x^a}$ حيث $x \neq 0 , y \neq 0$	$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$ ؛ $y \neq 0$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-5} = \left(\frac{b}{a}\right)^5 = \frac{b^5}{a^5}$ ؛ $a \neq 0 , b \neq 0$
القوة الصفرية	$x^0 = 1$ ؛ $x \neq 0$	$7^0 = 1$, $(2x)^0 = 1$ ؛ $x \neq 0$

كثيرة الحدود

المقصود بها	عبارة رياضية تحوي وحيدتي حد أو أكثر يفصلها علامة + أو −
مثال توضيحي	$3x^2-2x+7$, $5x^2y+2x-3y$
درجة كثيرة الحدود	• درجة كثيرة الحدود هي درجة وحيدة الحد ذات الدرجة الأعلى. • مثال: كثيرة الحدود $5x^2y+2x-3y$ من الدرجة الثالثة.

قسمة كثيرة حدود على وحيدة حد

الطريقة	نقسم كل حد من حدود كثيرة الحدود على وحيدة الحد
تذكير	عند قسمة الأساسات المتساوية نطرح الأسس لنفس الأساس
مثال توضيحي	$\frac{20c^4d^2f-16cdf^2+4cdf}{4cdf} = \frac{20c^4d^2f}{4cdf} - \frac{16cdf^2}{4cdf} + \frac{4cdf}{4cdf}$ $= 5c^{4-1}d^{2-1}f^{1-1} - 4c^{1-1}d^{1-1}f^{2-1} + c^{1-1}d^{1-1}f^{1-1}$ $= 5c^3d^1f^0 - 4c^0d^0f^1 + c^0d^0f^0$ $= 5c^3d - 4f + 1$

خطوات قسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود « القسمة الطويلة »

نقسم الحد الأول من المقسوم على الحد الأول من المقسوم عليه « نطرح الأسس لأن الأساسات متساوية »، ونكتب الناتج في مكان خارج القسمة	$\begin{array}{r\|l} & x \\ \hline x-3 & x^2 +7x -30 \end{array}$
نضرب خارج القسمة في المقسوم عليه ونكتب حاصل الضرب تحت المقسوم	$\begin{array}{r\|l} & x \\ \hline x-3 & x^2 +7x -30 \\ & x^2 -3x \end{array}$
نطرح حاصل الضرب السابق من المقسوم ونكتب الناتج تحتهما	$\begin{array}{r\|l} & x \\ \hline x-3 & x^2 +7x -30 \\ - & x^2 -3x \\ \hline & \quad 10x -30 \end{array}$
نعيد الخطوات الثلاث السابقة مع ناتج الطرح الأخير على أساس أنه المقسوم، ونكرر هذه الخطوة إلى أن تكتمل عملية القسمة	$\begin{array}{r\|l} & x+10 \text{ ناتج القسمة} \\ \hline x-3 & x^2 +7x -30 \\ - & x^2 -3x \\ \hline & \quad 10x -30 \\ - & \quad 10x -30 \\ \hline & \quad 0 \text{ باقي القسمة} \end{array}$

القسمة التركيبية

المقصود بها	طريقة مبسطة لقسمة كثيرة حدود على ثنائية الحد $x-r$
تنبيهات على القسمة التركيبية	• يجب ترتيب كثيرة الحدود تنازليًا حسب قوى متغيرها قبل البدء في إجراء عملية القسمة. • إذا لم يوجد أحد الحدود في كثيرة الحدود فيُضَاف بالمعامل صفر. • إذا كان المقسوم عليه بالشكل $bx+c$ يجب قسمة المقسوم والمقسوم عليه على b .
مثال توضيحي	كثيرة الحدود $2x^3-4x^2+6$ تُكتب بالشكل $2x^3-4x^2+0x+6$

خطوات القسمة التركيبية

لإيجاد ناتج قسمة كثيرة الحدود $3x^3-8x^2+11x-14$ على $x-2$ نتبع الخطوات التالية:

(١) نُحدد قيمة الثابت r .	$x-r = x-2 \;\Rightarrow\; r=2$
(٢) نكتب معاملات المقسوم ونكتب الثابت r بالصندوق، ثم نكتب المعامل الأول « 3 » أسفل الخط الأفقي.	$\begin{array}{r\|rrrr} 2 & 3 & -8 & 11 & -14 \\ & \downarrow & & & \\ \hline & 3 & & & \end{array}$
(٣) نضرب المعامل الأول « 3 » في الثابت r « 2 » ثم نكتب الناتج « 6 » أسفل المعامل الثاني « -8 ».	$\begin{array}{r\|rrrr} 2 & 3 & -8 & 11 & -14 \\ & & 6 & & \\ \hline & 3 & & & \end{array}$

(٤) نجمع ناتج الضرب « 6 » مع المعامل الثاني « -8 ».

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 3 & -8 & 11 & -14 \\ & & 6 & & \\ \hline & 3 & -2 & & \end{array}$$

(٥) نضرب ناتج الجمع « -2 » في الثابت r « 2 »، ثم نكتب الناتج « -4 » تحت المعامل الثالث « 11 ».

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 3 & -8 & 11 & -14 \\ & & 6 & -4 & \\ \hline & 3 & -2 & & \end{array}$$

(٦) نجمع ناتج الضرب « -4 » مع المعامل الثالث « 11 ».

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 3 & -8 & 11 & -14 \\ & & 6 & -4 & \\ \hline & 3 & -2 & 7 & \end{array}$$

(٧) نضرب ناتج الجمع « 7 » في الثابت r « 2 »، ثم نكتب الناتج « 14 » تحت المعامل الرابع.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 3 & -8 & 11 & -14 \\ & & 6 & -4 & 14 \\ \hline & 3 & -2 & 7 & \end{array}$$

(٨) نجمع ناتج الضرب « 14 » مع المعامل الرابع « -14 » فيكون ناتج القسمة $3x^2-2x+7$ والباقي 0 .

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 3 & -8 & 11 & -14 \\ & & 6 & -4 & 14 \\ \hline & 3 & -2 & 7 & \text{الباقي } 0 \end{array}$$

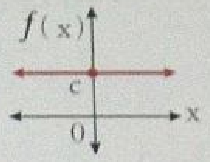
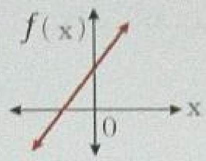
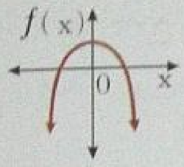
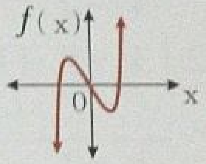
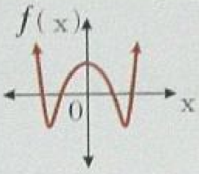
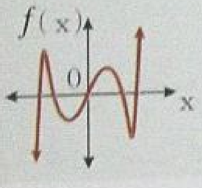
دوال كثيرات الحدود بمتغير واحد

صورتها العامة	$f(x) = a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ حيث: a_n , a_{n-1} , $\cdots$, a_2 , a_1 , a_0 أعداد حقيقية و $a_n \neq 0$, n عدد صحيح غير سالب.
فائدة	يمكن إيجاد قيمة دالة كثيرة الحدود عند أي قيمة للمتغير x
مثال توضيحي	لكثيرة الحدود $f(x)=5x^2-3x+12$ يكون .. $f(2) = 5(2)^2-3(2)+12 = 20-6+12 = 26$, $f(c) = c^2-3c+12$
تنبيهات	• $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ تسمى كثيرة حدود في المتغير x . • تكون كثيرة الحدود بالصورة القياسية إذا كانت أسس المتغير مرتبة ترتيبًا تنازليًا. • a_n يسمى **المعامل الرئيسي**، وأكبر أس للمتغير x يسمى **درجة كثيرة الحدود**. • دالة القوة هي أبسط دوال كثيرات الحدود، وتكتب بالصورة $f(x) = ax^b$.
مثال	لكثيرة الحدود $5x^6-3x^4+12x^3-14$ فإن: معاملها الرئيسي 5 ، درجتها السادسة

حالات خاصة لكثيرات الحدود

كثيرة الحدود	الثابتة	الخطية	التربيعية	التكعيبية
مثال	12	$3x-2$	$5x^2-4x+1$	$4x^3-2x^2+7x-1$
الدرجة	0	1	2	3
المعامل الرئيسي	12	3	5	4

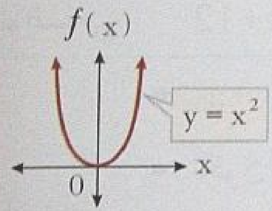
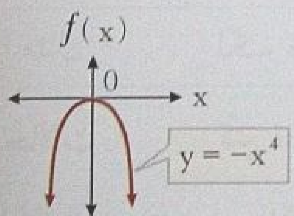
التمثيل البياني لبعض دوال كثيرات الحدود

الدالة الثابتة « الدرجة 0 »	الدالة الخطية « الدرجة 1 »	الدالة التربيعية « الدرجة 2 »
		
الدالة التكعيبية « الدرجة 3 »	**الدالة من الدرجة الرابعة**	**الدالة من الدرجة الخامسة**
		

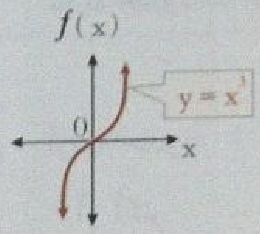
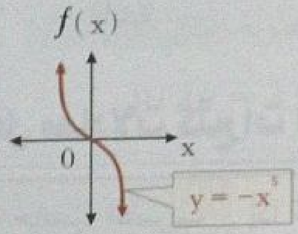
سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود

المقصود به	دراسة سلوك التمثيل البياني لكثيرة الحدود $f(x)$ عندما تقترب x من المالانهاية « $x \to \infty$ » أو سالب مالانهاية « $x \to -\infty$ »
تنبيهان	• درجة دالة كثيرة الحدود والمعامل الرئيسي هما العاملان الوحيدان في تحديد سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة ومداها. • المالانهاية « ∞ » غير محدود أو لا حدود له.

أمثلة توضيحية على سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود زوجية الدرجة

الدرجة زوجية والمعامل الرئيسي موجب	• المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية. • المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر أو تساوي القيمة الصغرى. • سلوك طرفي التمثيل البياني: $f(x) \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$ و $f(x) \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$	
الدرجة زوجية والمعامل الرئيسي سالب	• المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية. • المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الأصغر أو تساوي القيمة العظمى. • سلوك طرفي التمثيل البياني: $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$ و $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$	
فائدة	إذا كان طرفا التمثيل البياني للدالة في الاتجاه نفسه فإن الدالة زوجية الدرجة	

أمثلة توضيحية على سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود فردية الدرجة

الدرجة فردية والمعامل الرئيسي موجب	• المجال والمدى: مجموعة الأعداد الحقيقية. • سلوك طرفي التمثيل البياني: $f(x) \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$ و $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$	
الدرجة فردية والمعامل الرئيسي سالب	• المجال والمدى: مجموعة الأعداد الحقيقية. • سلوك طرفي التمثيل البياني: $f(x) \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$ و $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$	
فائدة	إذا كان طرفا التمثيل البياني للدالة في اتجاهين مختلفين فإن الدالة فردية الدرجة	

الأصفار الحقيقية للدوال زوجية الدرجة وفردية الدرجة

أساسيات	• تقاطع منحنى دالة كثيرة الحدود مع محور x يسمى صفراً حقيقيًا للدالة. • الصفر الحقيقي يعني صفراً ينتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية. • عدد الأصفار الحقيقية يساوي عدد مرات تقاطع التمثيل البياني لمنحنى الدالة مع محور x . • **عدد الأصفار الحقيقية لدالة كثيرة حدود زوجية الدرجة:** عدد زوجي **أو** ليس لها أصفار حقيقية. • **عدد الأصفار الحقيقية لدالة كثيرة حدود فردية الدرجة:** يساوي عدداً فرديًا.
تنبيهان	• عندما يمس منحنى دالة كثيرة الحدود $f(x)$ محور x فإن للدالة جذراً مكرراً عند هذه النقطة. • إذا لم يقطع التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود $f(x)$ محور x فإنه لا توجد لها أصفار حقيقية.

تحليل كثيرة الحدود

- تحليل كثيرة الحدود هو إعادة كتابة كثيرة الحدود على صورة ضرب عاملين أو أكثر.
- مثال: كثيرة الحدود x^2-5x+6 تُحلل بالصورة $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$.
- كثيرة الحدود التي لا يمكن تحليلها تسمى **كثيرة حدود أولية**؛ مثل: كثيرة الحدود $10x^2-3$.
- طرائق التحليل:

عدد الحدود	طريقة التحليل	الحالة العامة
أيّ عدد	إخراج العامل المشترك الأكبر	$4a^3b^2-8ab = 4ab(a^2b-2)$
حدان	الفرق بين مربعين	$a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$
	مجموع مكعبين	$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
	الفرق بين مكعبين	$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

ثلاثة حدود	ثلاثية حدود المربع الكامل	$a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$ $a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$
	ثلاثية الحدود بالصورة العامة	$acx^2+(ad+bc)x+bd = (ax+b)(cx+d)$
أربعة حدود أو أكثر	تجميع الحدود	$ax+bx+ay+by = x(a+b)+y(a+b)$ $= (a+b)(x+y)$
فائدة	يمكن استخدام أكثر من طريقة لتحليل كثيرة الحدود	

حل معادلات كثيرات الحدود بالتحليل

خاصية الضرب الصفري	إذا كان $a \cdot b = 0$ فإنه .. إما $a = 0$ أو $b = 0$
مثال توضيحي	حل معادلة كثيرة الحدود $x^2-5x=0$ .. $x^2-5x=0 \Rightarrow x(x-5)=0$ إما $x=0$ أو $x-5=0 \Rightarrow x=5$
الصورة التربيعية	$\boxed{au^2+bu+c}$ حيث: a , b , c أعداد حقيقية و $a \neq 0$.
التحويل إلى الصورة التربيعية	إعادة كتابة بعض كثيرات الحدود التي تحوي المتغير x والتي لها درجات كبيرة على صورة au^2+bu+c بعد تعريف u بدلالة x
فائدة	إذا كان حاصل ضرب الأس الأصغر في 2 يساوي الأس الأكبر فإن ثلاثية الحدود ax^m+bx^n+c يمكن تحويلها إلى الصورة التربيعية
مثالان توضيحيان	• تحويل كثيرة الحدود x^6+x^3+1 إلى الصورة التربيعية .. $2x^6+5x^3+4 = 2(x^3)^2+4x^3+5 = 2u^2+4u+5$ حيث: $x^3 = u$. • لا يمكن تحويل كثيرة الحدود $5x^8+x^2+6$ إلى الصورة التربيعية لأن $x^8 \neq (x^2)^2$.

نظرية الباقي

نظرية الباقي	التعبير اللفظي	إذا قُسمت كثيرة الحدود $P(x)$ على $x-r$ فإن باقي القسمة مقدار ثابت ويساوي $P(r)$
	التعبير الرمزي	المقسوم ناتج القسمة المقسوم عليه الباقي $P(x) = Q(x) \cdot (x-r) + P(r)$
	حيث: $Q(x)$ دالة كثيرة حدود تقل درجتها **بواحد** عن درجة $P(x)$.	

التعويض التركيبي	عملية تطبيق نظرية الباقي والقسمة التركيبية لإيجاد قيمة الدالة عند قيم معينة
مثال توضيحي	يمكن إيجاد $P(4)$ حيث $P(x)=x^2+5x-3$ بطريقتين .. **التعويض المباشر**: $P(4)=4^2+5(4)-3=16+20-3=33$ **التعويض التركيبي**: نقسم $P(x)=x^2+5x-3$ على $x-4$ .. $\begin{array}{r\|rrr} 4 & 1 & 5 & -3 \\ & \downarrow & 4 & 36 \\ \hline & 1 & 9 & 33 \end{array}$ الباقي وبحسب نظرية الباقي فإن .. $P(4)=33$

نظرية العوامل

نظرية العوامل	تكون ثنائية الحد $(x-r)$ عاملاً من عوامل كثيرة الحدود $P(x)$ إذا وفقط إذا كان $P(r)=0$
تنبيه	$P(r)=0$ يعني أن باقي قسمة $P(x)$ على $(x-r)$ يساوي 0
استعمال نظرية العوامل	• تُستعمل في التحقق من أن ثنائية حد معينة عامل من عوامل كثيرة حدود معطاة. • تُستعمل في تحديد جميع عوامل كثيرة الحدود.
مثال	لإثبات أن $(x-2)$ عامل من عوامل $P(x)=x^2-5x+6$ نثبت أن $P(2)=0$ .. $P(2)=(2)^2-5(2)+6=4-10+6=0$
فائدتان	• استخدام التعويض المباشر **أفضل** لإثبات أن $(x-r)$ عامل من عوامل $P(x)$. • استخدام التعويض التركيبي **أفضل** إذا كان المطلوب إيجاد بقية عوامل $P(x)$.

الأصفار والجذور والعوامل والمقاطع

إذا كانت $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ دالة كثيرة حدود فإن العبارات التالية متكافئة:

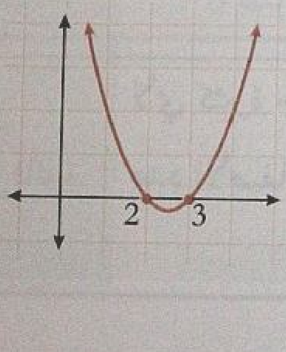
(١) c صفر للدالة $P(x)$.

(٢) c جذر أو حل للمعادلة $P(x)=0$.

(٣) $(x-c)$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$.

(٤) إذا كان c عدداً حقيقياً فإن $(c,0)$ هو المقطع x للتمثيل البياني للدالة $P(x)$.

مثال توضيحي: لدالة كثيرة الحدود $P(x)=x^2-5x+6$ فإن ..



(١) 3 , 2 هما صفرا الدالة $P(x)=x^2-5x+6$.

(٢) 3 , 2 هما جذرا أو حلا المعادلة $x^2-5x+6=0$.

(٣) $(x-3)$, $(x-2)$ هما عاملا كثيرة الحدود x^2-5x+6 .

(٤) $(3,0)$, $(2,0)$ هما مقطعا x للتمثيل البياني للدالة $P(x)=x^2-5x+6$.

النظرية الأساسية في الجبر

نصّها	كل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من الصفر لها جذر واحد على الأقل ينتمي لمجموعة الأعداد المركبة
تنبيه	أي جذر حقيقي هو جذر مركب
نتيجة	يكون لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n العدد n فقط من الجذور المركبة بما في ذلك الجذور المكررة
فائدة	دالة كثيرة الحدود من الدرجة n لها فقط العدد n من الأصفار
مثالان	كثيرة الحدود x^3+2x^2+6 لها 3 جذور مركبة ، وكثيرة الحدود $-2x^5-3x^2+8$ لها 5 جذور مركبة

قانون ديكارت للإشارات

استخدامه	يستخدم لتحديد العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة والعدد الممكن للأصفار الحقيقية السالبة لأي دالة كثيرة حدود
نَص القانون	إذا كانت $P(x) = a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ دالة كثيرة فإن .. • عدد الأصفار الحقيقية الموجبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(x)$ أو أقل منه بعدد زوجي. • عدد الأصفار الحقيقية السالبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(-x)$ أو أقل منه بعدد زوجي.
مثال توضيحي	• لدالة كثيرة الحدود $P(x) = 5x^3-2x^2+7x+1$ نجد أن .. إشارة معاملات $P(x)$ تغيرت مرتين ؛ ومنه فإن .. $p(x) = +5x^3 \xrightarrow{+\ -} -2x^2 \xrightarrow{-\ +} +7x \xrightarrow{+\ +} +1$ تتغير تتغير لاتتغير عدد الأصفار الحقيقية الموجبة للدالة $P(x)$ يساوي 2 أو 0 • لنفس كثيرة الحدود $P(x)$ فإن .. $P(-x) = 5(-x)^3-2(-x)^2+7(-x)+1$ ومنه فإن إشارة معاملات $P(-x)$ تغيرت مرة واحدة ؛ أي أنه .. $p(-x) = -5x^3 \xrightarrow{-\ -} -2x^2 \xrightarrow{-\ -} -7x \xrightarrow{-\ +} +1$ لاتتغير لاتتغير تتغير يوجد للدالة $P(x)$ صفر واحد حقيقي سالب
فائدة	لأي كثيرة حدود فإن .. عدد الأصفار الحقيقية الموجبة+عدد الأصفار الحقيقية السالبة+عدد الأصفار المركبة = درجة كثيرة الحدود

نظرية الأعداد المركبة المترافقة

نصها	إذا كان a , b عددين حقيقيين حيث $b \neq 0$ وكان $a+ib$ صفراً لدالة كثيرة الحدود معاملات حدودها أعداد حقيقية فإن $a-ib$ صفر للدالة أيضاً
مثال توضيحي	إذا كان $3+i$ صفراً للدالة $f(x)=x^4-18x^2+12x+80$ فإن .. $3-i$ صفر أيضًا للدالة $f(x)$
تنبيهات	• العددان المركبان $a+ib$, $a-ib$ يسميان عددين مترافقين. • أي عدد حقيقي هو مرافق نفسه. • $(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$.

نظرية الصفر النسبي

نصها	إذا كانت $P(x)$ كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد صحيحة فإن أي صفر نسبي للدالة $P(x)$ سيكون على صورة العدد النسبي $\frac{p}{q}$ في أبسط صورة؛ حيث p أحد عوامل الحد الثابت، q أحد عوامل المعامل الرئيسي
مثال توضيحي	لتكن $P(x)=2x^3+3x^2-17x+12$ ، والعدد النسبي $\frac{3}{2}$ صفر للدالة $P(x)$ فإن 3 أحد عوامل العدد 12 و 2 أحد عوامل العدد 2
فائدة	العدد b يكون عامل من عوامل العدد a إذا كان $\frac{a}{b}$ يساوي عدد صحيح
مثال توضيحي	العدد 3 عامل من عوامل العدد 12 لأن $\frac{12}{3}$ يساوي العدد الصحيح 4
نتيجة	إذا كانت $P(x)$ كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد صحيحة والمعامل الرئيسي لها 1 وحدُّها الثابت لا يساوي الصفر فإن أي صفر نسبي للدالة $P(x)$ يجب أن يكون أحد عوامل الحد الثابت
مثال توضيحي	إذا كانت $P(x)=x^2-5x+6$ فإن .. العدد 2 صفر للدالة $P(x)$ وهو أحد عوامل الحد الثابت 6

الفصل الرابع: العلاقات والدوال العكسية والجذرية

العمليات على الدوال

العمليات	الجمع	$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$	الطرح	$(f-g)(x) = f(x)-g(x)$
	الضرب	$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$	القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$; $g(x) \neq 0$
مثال	إذا كانت $f(x) = 2x$, $g(x) = -x+5$ فإن .. $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = 2x+(-x+5) = x+5$ $(f-g)(x) = f(x)-g(x) = 2x-(-x+5) = 2x+x-5 = 3x-5$ $(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x) = 2x\cdot(-x+5) = -2x^2+10x$ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x}{-x+5}$; $x \neq 5$			

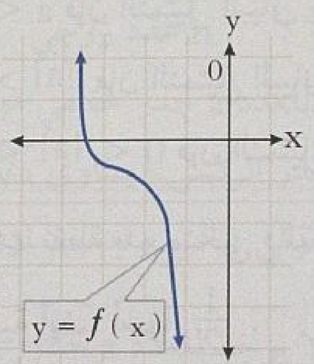
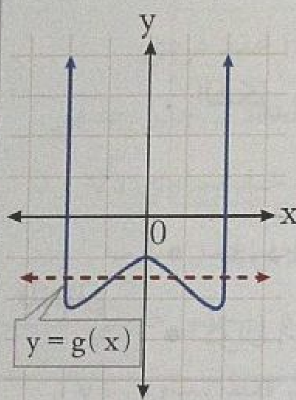
تركيب دالتين

التعبير اللفظي	إذا كانت f و g دالتين وكان مدى g مجموعة جزئية من مجال الدالة f فإنه يمكن إيجاد دالة التركيب $f\circ g$ كما يلي: $[f\circ g](x) = f[g(x)]$
فوائد	• يرمز لتركيب الدالتين f و g بالرمز $[f\circ g]$ أو $f[g(x)]$ وتُقرأ f بعد g . • عند تركيب دالتين فإن نواتج دالة منهما تُستعمل لحساب نواتج الدالة الأخرى. • يمكن أن يكون تركيب دالتين غير مُعرّف. • إذا كانت f و g دالتين فإن $[f\circ g](x)$ يكون مُعرّفًا فقط إذا كان مدى $g(x)$ مجموعة جزئية من مجال f .

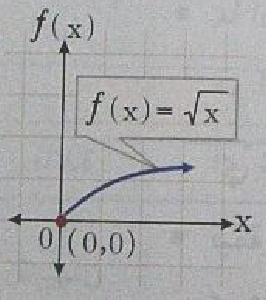
أساسيات عن العلاقات

العلاقة	{ مجموعة من الأزواج المرتبة }
العلاقة العكسية	• **المقصود بها:** تبديل إحداثيات كل زوج مرتب للعلاقة. • **التعبير اللفظي:** تكون كل من العلاقتين عكسية للأخرى إذا وفقط إذا احتوت إحداهما على أي زوج مرتب مثل (a,b) ، وتحوي الأخرى على الزوج المرتب (b,a) .

مثال	كل من العلاقتين A ، B علاقة عكسية للأخرى حيث .. $A = \{(1,5),(2,6),(3,7)\}$, $B = \{(5,1),(6,2),(7,3)\}$
فائدة	مجال العلاقة العكسية هو مدى العلاقة، ومدى العلاقة العكسية هو مجال العلاقة
الدالة العكسية	• نحصل على دالة عكسية من دالة بتبديل مجال الدالة ومداها. • الدالة $f(x)$ رمز دالتها العكسية $f^{-1}(x)$. • إذا كان كل من f ، f^{-1} دالة عكسية للأخرى فإن $f(a) = b$ إذا وإذا فقط كان $f^{-1}(b) = a$. • ليس لكل دالة دالة عكسية. • الدالتان $f(x)$ ، $g(x)$ تمثل كل منهما دالة عكسية للأخرى إذا وفقط إذا كان $[f \circ g](x) = x$ و $[g \circ f](x) = x$ ؛ حيث x دالة محايدة. • نرمز للدالة المحايدة بالرمز x أو $I(x)$.
اختبار الخط الأفقي	• **استخدامه:** لتحديد إذا كان معكوس دالة يمثل دالة أم لا؛ ولدينا احتمالان ..

معكوس الدالة $f(x)$ يمثل دالة	معكوس الدالة $g(x)$ ليس دالة
• لا يمكن رسم أي مستقيم أفقي يقطع منحنى الدالة في أكثر من نقطة. • معكوس الدالة $y = f(x)$ يمثل دالة أيضاً.	• يمكن رسم مستقيم أفقي يقطع منحنى الدالة في أكثر من نقطة. • معكوس الدالة $y = g(x)$ لا يمثل دالة.
	

دوال الجذر التربيعي

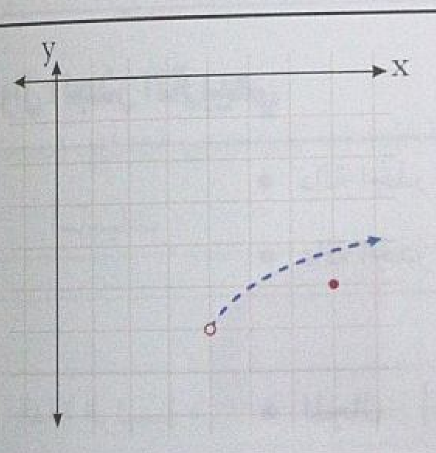
أساسيات	• دالة الجذر التربيعي دالة تحوي متغيراً تحت رمز الجذر التربيعي. • دالة الجذر التربيعي نوع من أنواع الدوال الجذرية.
الدالة الرئيسية « الأم » لدوال الجذر التربيعي	$f(x) = \sqrt{x}$ • المجال: $\{x \mid x \geq 0\}$. • المدى: $\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$. • المقطع x هو $x = 0$ والمقطع y هو $y = 0$. • غير معرفة عندما $x < 0$. 

فائدتان	• مجال دالة الجذر التربيعي محدد بالقيم التي تكون عندها الدالة معرّفة. • سلوك الدالة عند طرفيها .. $f(x) \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$ و $f(x) \to 0$ عندما $x \to 0$

تمثيل دوال الجذر التربيعي بيانيًا

المقصود بها	تحويل للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = \sqrt{x}$ مع تحديد المجال والمدى	
تحويلات دوال الجذر التربيعي	الدالة الجذرية	$f(x) = a\sqrt{x-h}+k$
	الإزاحة الأفقية	• إزاحة بمقدار $\lvert h\rvert$ وحدة يمينًا، إذا كانت h موجبة. • إزاحة بمقدار $\lvert h\rvert$ وحدة يسارًا، إذا كانت h سالبة. • **المجال:** $\{x \mid x \geq h\}$.
	الإزاحة الرأسية	• إزاحة بمقدار $\lvert k\rvert$ وحدة لأعلى، إذا كانت k موجبة. • إزاحة بمقدار $\lvert k\rvert$ وحدة لأسفل، إذا كانت k سالبة. • **المدى:** $\{f(x) \mid f(x) \geq k\}$.
	الشكل والاتجاه	• إذا كانت $a < 0$ فإن التمثيل البياني ينعكس حول المحور x . • إذا كانت $\lvert a\rvert > 0$ فإن التمثيل البياني يتسع رأسيًا. • إذا كانت $0 < \lvert a\rvert < 1$ فإن التمثيل البياني يضيق رأسيًا.
فائدتان	• حدود المجال والمدى تمثل إحداثيات نقطة بدء منحنى دالة الجذر التربيعي. • دوال الجذر التربيعي هي دوال أسية أيضًا أسها $\frac{1}{2}$.	

متباينة الجذر التربيعي

المقصود بها	متباينة يكون متغيرها x تحت الجذر التربيعي	
مثال توضيحي	• لتمثيل المتباينة $y < \sqrt{x-4}+6$ بيانيًا نمثل الحد $y = \sqrt{x-4}-6$ بيانيًا. • المجال $\{x \mid x \geq 4\}$. • بما أن قيمة y أقل من الحد فإن التمثيل البياني للمتباينة هو المنطقة المظللة تحت الحد، وضمن المجال.	
فائدة	أيّ نقطة في المنطقة المظللة تحقق المتباينة ؛ فمثلاً النقطة $(7,-5)$ تحقق $-5 < -4.27$	
تنبيهان	• قيمة y أصغر من الحد: التمثيل البياني للمتباينة هو المنطقة المظللة تحت الحد، وضمن المجال. • قيمة y أكبر من الحد: التمثيل البياني للمتباينة هو المنطقة المظللة فوق الحد، وضمن المجال.	

الجذر النوني

المقصود به	العملية العكسية لرفع عدد لقوة (n)
رمزه	$\sqrt[n]{81}$ (رمز الجذر ← ، ما تحت الجذر ← 81 ، الدليل ← n)
التعبير اللفظي	لأي عددين a ، b ولأي عدد صحيح موجب n ؛ إذا كان $a^n = b$ فإن a هو جذر نوني للعدد b

التوضيح بالرموز

القوى	العوامل	التعبير اللفظي	الجذور
$a^n = b$	$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{مرة}} = b$	a هو الجذر النوني للعدد b	$\sqrt[n]{b} = a$

الجذر الرئيس ومعكوسه

الجذر الرئيس	الجذر غير السالب عندما يكون هناك أكثر من جذر حقيقي ؛ وتكون n عددًا زوجيًا
معكوس الجذر الرئيس	الجذر السالب « النظير الجمعي »

مثال توضيحي

- بما أن $81 = (\pm 3)^4$ فإن كلًا من العددين -3 و 3 جذر رابع للعدد 81 .
- يُسمى العدد 3 الجذر الرابع الرئيس للعدد 81 .

الجذر النوني الحقيقي

إذا كان n عددًا صحيحًا أكبر من 1 ، a عددًا حقيقيًا فإن ..

a	n عدد زوجي	n عدد فردي
$a > 0$	يوجد للعدد a جذر حقيقي موجب وحيد « الجذر الرئيس » يساوي $+\sqrt[n]{a}$ وجذر حقيقي سالب وحيد يساوي $-\sqrt[n]{a}$	يوجد للعدد a جذر حقيقي موجب وحيد يساوي $\sqrt[n]{a}$ ولا يوجد جذر سالب
$a < 0$	لا يوجد للعدد a جذور حقيقية	يوجد للعدد a جذر حقيقي سالب وحيد فقط يساوي $\sqrt[n]{a}$
$a = 0$	يوجد للعدد a جذر حقيقي واحد فقط يساوي $\sqrt[n]{0} = 0$	يوجد للعدد a جذر حقيقي واحد فقط يساوي $\sqrt[n]{0} = 0$

تنبيهات

- إذا كان n عددًا فرديًا فإن $\sqrt[n]{x^n} = x$ ؛ حيث x عدد حقيقي.
- إذا كان n عددًا زوجيًا فإن $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ ؛ حيث $|x|$ القيمة المطلقة لـ x .
- إذا كان n عددًا زوجيًا و m عدد زوجيًا و r عددًا فرديًا و $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n]{(x^r)^n}$ فإن $\sqrt[n]{x^m} = |x^r|$.

فائدة

يمكن تقريب الجذور باستعمال الحاسبة

تبسيط العبارات الجذرية بعمليتي الضرب والقسمة

العملية	القاعدة	أمثلة توضيحية
ضرب الجذور	$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{27} = 3$
قسمة الجذور	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ حيث $b \neq 0$	$\sqrt[3]{\frac{x^6}{8}} = \frac{\sqrt[3]{x^6}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x^2$
إنطاق المقام	يُستعمل لإزالة الجذور من المقام أو الكسور تحت الجذر، وطريقته كالتالي:	
تنبيهات	• a ، b عددان حقيقيان ، n عدد صحيح أكبر من 1 . • إذا كانت n عددًا زوجيًا يكون a ، b عددين غير سالبين. • يجب أن تكون جميع الجذور معرّفة.	

قيمة المقام	نضرب البسط والمقام في ..	مثال توضيحي
$\sqrt{b}$	$\sqrt{b}$	$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\sqrt[n]{b^x}$	$\sqrt[n]{b^{n-x}}$	$\frac{5}{\sqrt[3]{2}} = \frac{5}{\sqrt[3]{2}}\times\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{5\sqrt[3]{4}}{2}$ حيث: $n=3$ ، $x=1$.

العمليات على العبارات الجذرية

المقصود بها	استعمال خواص العمليات الحسابية لتبسيط العبارات الجذرية
مثال توضيحي لضرب العبارات الجذرية	$5\sqrt[3]{-12ab^4}\times3\sqrt[3]{18a^2b^2} = 5\times3\times\sqrt[3]{-12ab^4\times18a^2b^2}$ $= 15\times\sqrt[3]{(2)^2\times-3\times ab^4\times2\times3^2\times a^2b^2}$ $= 15\times(2)\times(-3)\times a\times b^2 = -90ab^2$
تنبيه	يمكن جمع وطرح العبارات الجذرية بشرط أن تكون الجذور متشابهة
مثالان توضيحيان	• $7\sqrt{2}-8\sqrt{2} = (7-8)\sqrt{2} = -\sqrt{2}$. • $5\sqrt{12}+2\sqrt{27} = 5\sqrt{3\times4}+2\sqrt{3^2\times3} = 10\sqrt{3}+6\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$.
الجذور المتشابهة	المقصود بها: تكون الجذور متشابهة إذا كان لها الدليل نفسه والمقادير تحت الجذر نفسها أمثله: • جذران متشابهان: $\sqrt{3b}$, $4\sqrt{3b}$. • جذران غير متشابهين: $\sqrt{3b}$, $\sqrt[3]{3b}$. • جذران غير متشابهين: $\sqrt{2b}$, $\sqrt{3b}$.

مثال توضيحي لاستعمال المرافق لإنطاق المقام	لتبسيط العبارة الجذرية $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$ ؛ نستعمل مرافق المقام وهو $\sqrt{5}+1$ كما يلي: $\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}\times\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2-1^2}=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{4}$
تنبيهات	• عند جمع أو طرح العبارات الجذرية نُبسط كل حد على حدة قبل جمع أو طرح الجذور المتشابهة. • يمكن ضرب الجذور باستعمال الخاصية التوزيعية المستعملة عند ضرب ثنائيات الحدود. • حاصل ضرب عددين مترافقين هو دائمًا عدد نسبي.

الأسس النسبية

التعبير اللفظي	$\boxed{b^{\frac{x}{y}}=\sqrt[y]{b^x}=(\sqrt[y]{b})^x}$ حيث: b عدد حقيقي لا يساوي الصفر ، x و y عددان صحيحان بحيث $y > 1$.
مثال توضيحي	$27^{\frac{2}{3}}=(\sqrt[3]{27})^2=(\sqrt[3]{3^3})^2=3^2=9$
تنبيه	إذا كانت $b < 0$ و y عددًا زوجيًا فإن الجذر قد يكون عددًا مركبًا
مثال توضيحي	$(-16)^{\frac{3}{2}}=(\sqrt{-16})^3=(4i)^3=-64\imath$
فوائد	• بما أن مربع $b^{\frac{1}{2}}$ هو b فإن $b^{\frac{1}{2}}=\sqrt{b}$. • $b^{-n}=\frac{1}{b^n}$. • تربيع عدد وإيجاد جذره التربيعي عمليتان عكسيتان.
الصورة الجذرية	الصورة الجذرية لـ $x^{\frac{1}{6}}$ هي $\sqrt[6]{x}$ ، أي أن $x^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{x}$
الصورة الأسية	الصورة الأسية لـ $\sqrt[4]{z}$ هي $z^{\frac{1}{4}}$ ، أي أن $\sqrt[4]{z}=z^{\frac{1}{4}}$

تبسيط العبارات

تبسيط عبارات بأسس نسبية	عند تبسيط عبارات تحوي أسسًا نسبية نترك الأسس على الصورة النسبية بدلاً من كتابة العبارة على الصورة الجذرية
مثالان توضيحيان	• $a^{\frac{1}{5}}\cdot a^{\frac{4}{5}}=a^{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}}=a^{\frac{5}{5}}=a$. • $b^{-\frac{4}{5}}=\frac{1}{b^{\frac{4}{5}}}=\frac{1}{b^{\frac{4}{5}}}\cdot\frac{b^{\frac{1}{5}}}{b^{\frac{1}{5}}}=\frac{b^{\frac{1}{5}}}{b^{\frac{5}{5}}}=\frac{b^{\frac{1}{5}}}{b}$.
تبسيط العبارات الجذرية	لتبسيط عبارة جذرية نجعل الجذر أقل ما يمكن، ونستعمل الأسس النسبية، ثم نكتب الناتج النهائي في الصورة الجذرية

أمثلة توضيحية	$\frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt{3}} = \frac{81^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{(3^4)^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{3^{\frac{4}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}} = 3^{\frac{4}{4}-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
تنبيه	تكون العبارات التي تتضمن أسسًا نسبية في أبسط صورة إذا تحققت الشروط التالية: • جميع الأسس غير سالبة. • جميع الأسس في المقام هي أعداد صحيحة موجبة. • لا يتضمن أي من البسط أو المقام أو كليهما كسرًا. • دليل الجذر أو الجذور المتبقية فيها أصغر ما يمكن.

حل المعادلات الجذرية

المعادلة الجذرية	• المقصود بها: معادلة تحوي عبارات جذرية. • مثال توضيحي: $\sqrt{x+2}+4 = 7$.
حل المعادلات الجذرية	نحل المعادلات الجذرية عن طريق رفع طرفي المعادلة لأس معين بحيث نتخلص من الجذر
خطوات حل المعادلات الجذرية	(١) نجعل الجذر في طرف واحد من المعادلة. (٢) نرفع طرفي المعادلة لأس يساوي دليل الجذر؛ وذلك للتخلص من الجذر. (٣) نحل معادلة كثيرة الحدود الناتجة، ثم نتحقق من صحة الحل.
الحل الدخيل	الحل الذي لا يحقق المعادلة الجذرية الأصلية
تنبيهان	• نستخدم طرق حل معادلات الجذور التربيعية والتكعيبية لحل المعادلات الجذرية أيًا كان دليل جذرها. • للتخلص من الجذر النوني لأيّ تعبير نرفعه للأس n .

حل المتباينات الجذرية

المتباينة الجذرية	• المقصود بها: متباينة تحوي متغيرًا في الصورة الجذرية. • مثال توضيحي: $\sqrt{x+2}+4 \le 7$.
خطوات حل المتباينة الجذرية	(١) إذا كان دليل الجذر عددًا زوجيًا فإننا نُعيّن القيم التي تجعل ما تحت الجذر غير سالب. (٢) نحل المتباينة جبريًا. (٣) نختبر القيم للتأكد من صحة الحل.
تنبيه	المتباينة التي تُبسط للصورة $\sqrt{ax+b} \le c$ حيث c عدد سالب؛ ليس لها حل