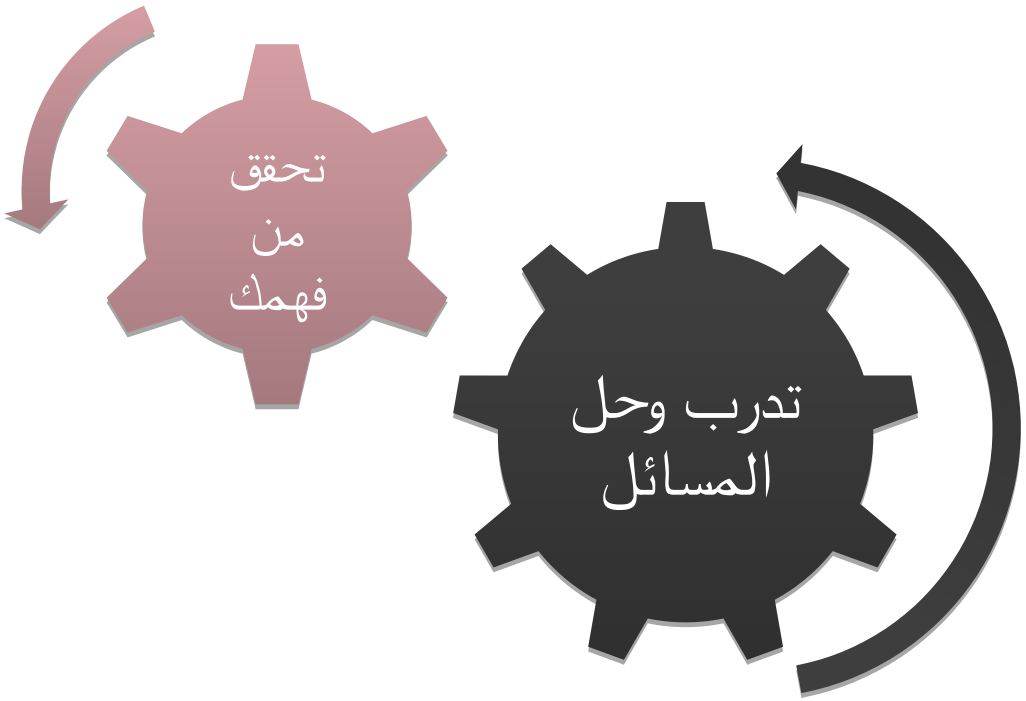
الرياضيات 5

تحقق من فهمك – تدرب وحل المسائل

نظام المقررات

الرئيسية



تحقق من فهمك

الفصل (1) تحليل الدوال

الفصل (2) العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

الفصل (3) المتطابقات والمعادلات المثلثية

الفصل (4) القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

الرئيسية

الفصل (1)
تحليل الدوال

1-1

1-2

1-3

1-4

1-5

1-6

1-7

عودة لفهرس تحقق

1-1 الدوال

تحقق من فهمك

اكتب كلًّا من مجموعات الأعداد الآتية باستعمال الصفة المميزة للمجموعة:

1A $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots.\}$

1B $x \leq -3$

1C $-1 \leq x \leq 5$

الحل

1A $\{x \mid x \geq 1 , x \in w\}$

1B $\{x \mid x \leq -3 , x \in R\}$

1C $\{x \mid -1 \leq x \leq 5 , x \in z\}$

عودة لفهرس الفصل (1)

تحقق من فهمك

اكتب كلًّا من المجموعات الآتية باستعمال رمز الفترة:

2A $-4 \le y < -1$

2B $a \ge -3$

2C $x < -2$ أو $x > 9$

الحل

2A $[-4,-1)$

2B $[-3,\infty)$

2C $(-\infty,-2)\cup(9,\infty)$

تحقق من فهمك

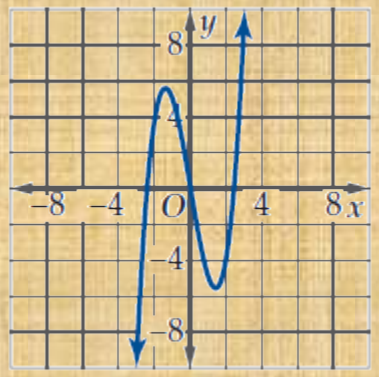
في كل علاقة مما يأتي، حدّد ما إذا كانت y تمثّل دالةً في x أم لا:

3A تمثّل قيم x كمية الاستهلاك الشهري لأسرة من الكهرباء، أما قيم y فتمثّل المبلغ المستحق مقابل الاستهلاك.

3B

x	y
-6	-7
2	3
5	8
5	9
9	22

3C



3D $3y + 6x = 18$

الحل

3A دالة

3B لا تمثل دالة

3C دالة

3D دالة

تحقق من فهمك

إذا كانت $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2 - 2x + 1}$، فأوجد قيمة الدالة في كل مما يأتي:

4A $f(12)$

4B $f(6x)$

4C $f(-3a + 8)$

الحل

4A $\dfrac{27}{121}$

4B $\dfrac{12x + 3}{36x^2-12x+1}$

4C $\dfrac{-6a + 8}{4a^2-42a+49}$

تحقق من فهمك

حدِّد مجال كلٍّ من الدوال الآتية:

5A $f(x) = \dfrac{5x - 2}{x^2 + 7x + 12}$

5B $h(a) = \sqrt{a^2 - 4}$

5C $g(x) = \dfrac{8x}{\sqrt{2x + 6}}$

الحل

5A $R-\{-3,-4\}$

$\{x \mid x \neq -3 , x \neq -4 , x \in R\}$

5B $(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$

5C $(-3,\infty)$

تحقق من فهمك

سرعة: إذا كانت سرعة مركبة $v(t)$ بالميل لكل ساعة تُعطى بالدالة متعددة التعريف الآتية، حيث الزمن t بالثواني:

$$v(t) = \begin{cases} 4t & , \quad 0 \le t \le 15 \\ 60 & , \quad 15 < t < 240 \\ -6t + 1500 & , \quad 240 \le t \le 250 \end{cases}$$

فأوجد كلًّا مما يأتي:

6A $v(5)$ **6B** $v(15)$ **6C** $v(245)$

الحل

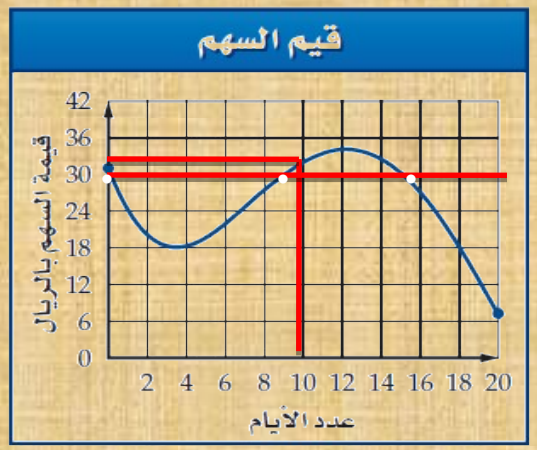
6A 20 mi/h **6B** 60 mi/h **6C** 30 mi/h

تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

1-2

تحقق من فهمك

أسهم: تابع مستثمر قيمة سهم خلال عشرين يومًا، فوجد أنه يمكن تقدير قيمة السهم بالدالة:
$v(d) = 0.002d^4 - 0.11d^3 + 1.77d^2 - 8.6d + 31, 0 \le d \le 20$، حيث $v(d)$ قيمة السهم بالريال في اليوم d.



1A استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة السهم في اليوم العاشر. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

الحل

32

1B استعمل التمثيل البياني لتحديد الأيام التي بلغت فيها قيمة السهم 30 ريالًا. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

الحل

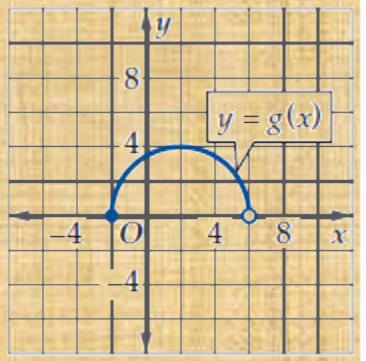
0 , 8.0478 , 16.078

عودة لفهرس الفصل (1)

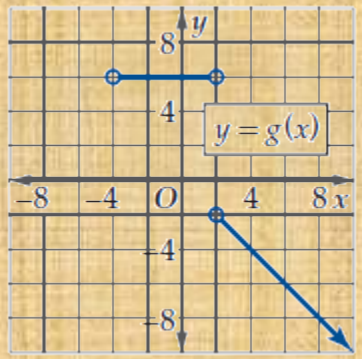
تحقق من فهمك

أوجد مجال الدالة f ومداها باستعمال التمثيل البياني لها

2A



2B



الحل

2A

المجال $[-2,6]$

المدى $[0,4]$

2B

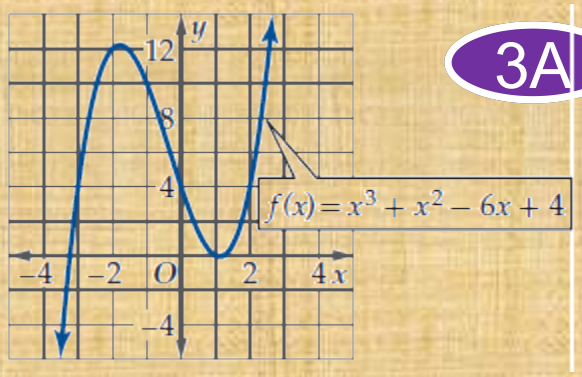
المجال $(-4,2)\cup[2,\infty)$

المدى $(-\infty,-2)\cup\{6\}$

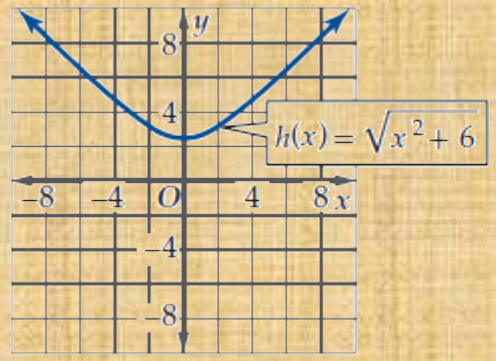
تحقق من فهمك

استعملْ التمثيل البياني لكل من الدالتين أدناه، لإيجاد قيمة تقريبية للمقطع y، ثم أوجده جبريًا:

3A



3B



الحل

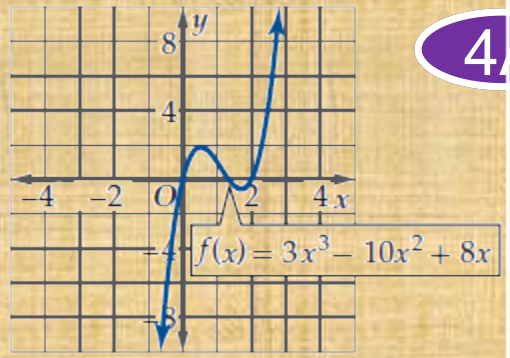
3A $F(0)=4$

3B $F(0)=\sqrt{6}=2.4$

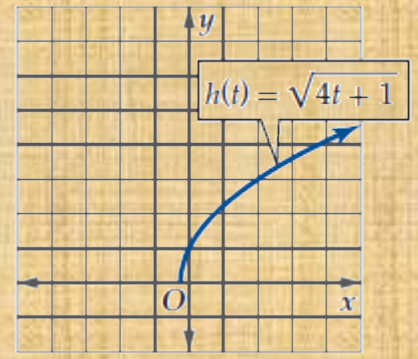
تحقق من فهمك

استعمل التمثيل البياني للدالة لإيجاد قيم تقريبية لأصفارها، ثم أوجد هذه الأصفار جبريا.

4A



4B



الحل

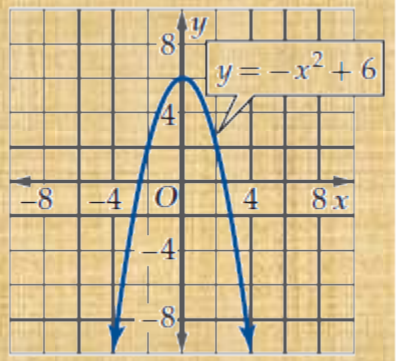
4A $X=0 \ , \ x=\frac{4}{3} \ , \ x=2$

4B $t = \frac{-1}{4} = -0,25$

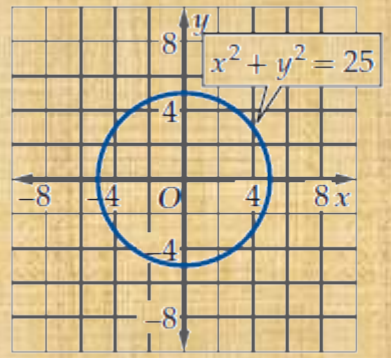
تحقق من فهمك

استعمل التمثيل البياني لكلٍ من المعادلتين الآتيتين لاختبار التماثل حول المحور x والمحور y ونقطة الأصل.
عزِّز إجابتك عدديًا، ثم تحقق منها جبريًا:

5A



5B



الحل

5A

يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور y لأن لكل نقطة (x,y) على المنحنى فإن

5B

يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل وحول محوري x, y لأن لكل نقطة (x,y) على المنحنى فإن النقط (x,y) ,

تحقق من فهمك

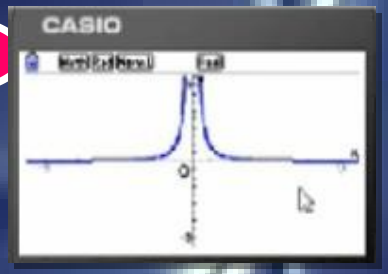
استعمل الحاسبة البيانية لتمثل كل دالة مما يأتي بيانيًا. ثمَّ حلّل منحناها لتحدّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا. وإذا كانت الدالة زوجية أو فردية فصف تماثل منحناها:

6A $f(x) = \frac{2}{x^2}$

6B $g(x) = 4\sqrt{x}$

6C $h(x) = x^5 - 2x^3 + x$

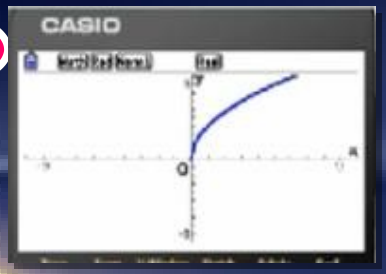
6A



$f(x)=f(-x)=\frac{2}{x^2}$

∴ الدالة زوجية

6B

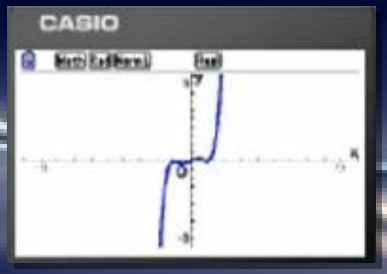


$g(x)\neq g(-x)$

$g(-x)\neq -g(x)$

الدالة ليست زوجية وليست

6C



$h(x)\neq h(-x)$

$h(-x)=-h(x)$

∴ الدالة فردية

الاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني والنهايات

1-3

تحقق من فهمك

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلتين عند $x = 0$. برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال:

1A $f(x) = x^3$

1B
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

1A

1) F(0)=0 , أيأن الدالة معرفة عند X=0

2) $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

3) $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

نستنتج أن f(x) متصلة عند $x \to 0$

1B

1) F(0)=0 , أيأن الدالة معرفة عند X=0

2) $\lim_{x \to 0} f(x)$ غير موجودة

نستنتج أن f(x) غير متصلة .

عودة لفهرس الفصل (1)

تحقق من فهمك

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند قيم x المعطاة. برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، و إذا كانت الدالة غير متصلة فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي ، قفزي ، قابل للإزالة.

2A $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ، عند $x=0$.

2B $f(x)=\begin{cases} 5x+4 & , \quad x>2 \\ 2-x & , \quad x\le 2 \end{cases}$ ، عند $x=2$.

الحل

2A

1) الدالة غير معرفة
2) النهاية غير موجودة
أي أن عدم اتصال لا نهائي

2B

1) الدالة معرفة
2) النهاية غير موجودة
أي أن عدم اتصال قفزي

تحقق من فهمك

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة في الفترة المحددة

3A $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x + 3 \;,\; [-6, 4]$

3B $f(x) = \frac{x^2 - 6}{x + 4} \;,\; [-3, 4]$

الحل

3A

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-43	-32	3	18	19	12	3	-2	3		

بما أن f(-5) سالبة و f(-4) موجبة , وحسب النتيجة السابقة , فإنه يوجد صفر للدالة f(x) بين -4 , -5 , أي يوجد صفر للدالة في الفترة -5 < x < -4 . لاحظ أن قيم الدالة تتغير اشارتها أيضاً في الفترة 0 < x < 1 وفي 1 < x < 2 . وهذا يدل على وجود أصفار حقيقية للدالة في هاتين الفترتين .

3B

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	-1	$-\frac{5}{3}$	-1.5	-1	$-\frac{1}{3}$	0.4	1.25

بما أن f(-3) موجبة و f(-2) سالبة , وحسب النتيجة السابقة , فإنه يوجد صفر للدالة f(x) بين -2 , -3 , أي يوجد صفر للدالة في الفترة -3 < x < -2 . لاحظ أن قيم الدالة تتغير اشارتها أيضاً في الفترة 2 < x < 3 . وهذا يدل على وجود أصفار حقيقية للدالة بهذه الفترة

تحقق من فهمك

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة في الفترة المحددة

4A $f(x) = 8x^3 - 2x^2 - 5x - 1$ ، $[-5, 5]$

4B $f(x) = x^3 - 7x^2 + 18x - 14$ ، $[0, 4]$

الحل

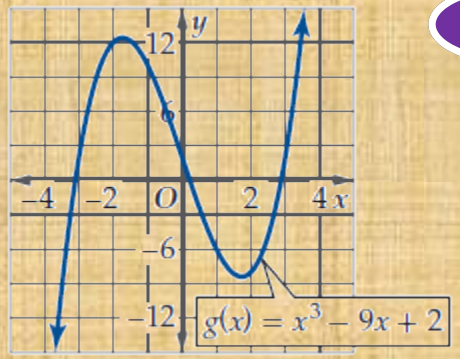
4A $[0,1]$

4B $[1,2]$

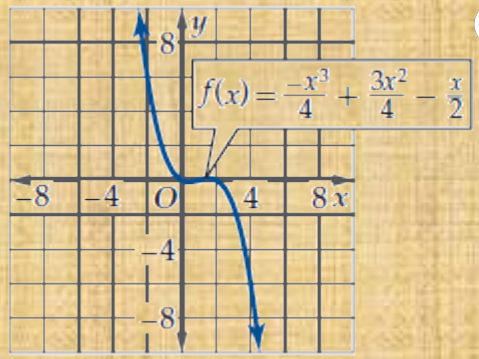
تحقق من فهمك

استعمل التمثيل البياني للدالة لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني، ثم عزز إجابتك عدديًا.

5A



5B



الحل

5A

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

5B

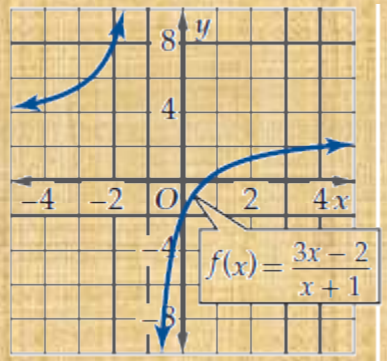
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

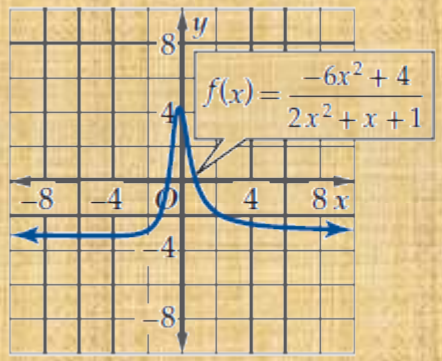
تحقق من فهمك

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x)$ لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني. ثم عزز إجابتك عدديًّا.

6A



6B



الحل

6A

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 3$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$

6B

$\lim_{x \to \infty} f(x) = -3$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -3$

تحقق من فهمك

7 **فيزياء:** الضغط الديناميكي هو قياس الضغط الناتج عن حركة جزيئات الغاز ويعطى بالقاعدة $q(v) = \frac{\rho v^2}{2}$، حيث ρ (ويقرأ روه) كثافة الغاز، و v السرعة التي يتحرك بها الجزيء. ماذا يحدث للضغط الديناميكي لجزيئات الغاز عندما تستمر سرعة الجزيئات في التزايد؟

الحل

7 $\lim_{v \to \infty} q(v) = \infty$

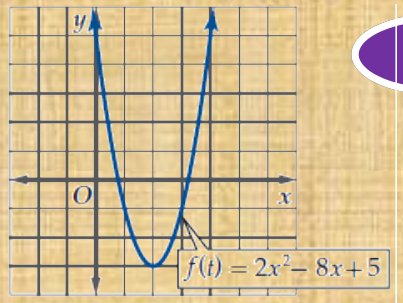
القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

1-4

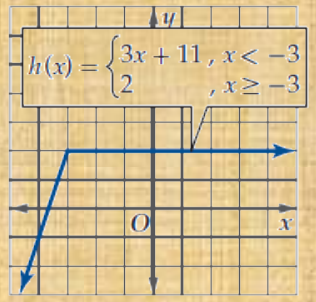
تحقق من فهمك

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقربةً إلى أقرب 0.5 وحدة، ثم عزز إجابتك عدديًا.

1A



1B



الحل

1A يبين التمثيل البياني أن الدالة متناقصة في الفترة $(-\infty, -2)$ ، ومتزايدة في الفترة $(-2, \infty)$

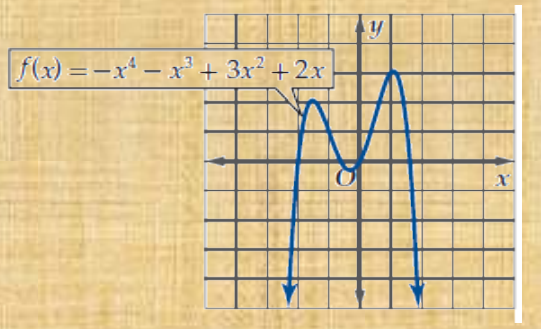
1B يبين التمثيل البياني أن الدالة متزايدة في الفترة $(-\infty, -3)$ ، وثابتة في الفترة $(-3, \infty)$

عودة لفهرس الفصل (1)

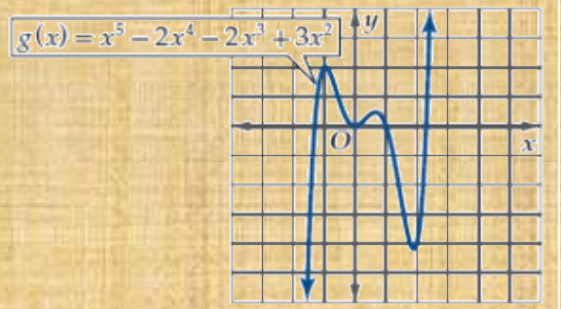
تحقق من فهمك

قدّر قيم x التي يكون للدالة $f(x)$ عندها قيم قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبين نوع القيم القصوى، ثم عزز إجابتك عدديًا.

2A



2B



الحل

2A

يوضح التمثيل البياني أن للدالة قيمة عظمى محلية عند x=-1.5 ومقدارها 2 تقريباً. كما يوجد للدالة قيمة عظمى مطلقة عند x=1 ومقدارها 3 تقريباً . كما يوجد للدالة قيمة صغرى محلية عند x=-0.3 ومقدارها 0 تقريباً.

2B

يوضح التمثيل البياني أن للدالة قيمة عظمى محلية عند x=-1 ومقدارها 2 تقريباً وعند x=0.5 ومقدارها 0.5 تقريباً. كما يوجد للدالة قيمة صغرى محلية عند x=0 ومقدارها 0 تقريباً وعند x=2 ومقدارها -4 تقريباً .لاحظ كذلك أن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$x \to \infty$ $\quad$ $x \to -\infty$

تحقق من فهمك

استعمل الحاسبة البيانية لتجد القيم القصوى المحلية والمطلقة للدالة مقربة إلى أقرب جزء من مئة، وحدد قيم x التي تكون عندها هذه القيم.

3A $h(x) = 7 - 5x - 6x^2$

3B $g(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 5$

الحل

3A

باستعمال الحاسبة نجد أن للدالة قيمة عظمى مطلقة عند $x=-0.42$ ومقدارها 8.04 تقريباً .

3B

باستعمال الحاسبة نجد أن للدالة قيمة عظمى محلية عند $x=-0.12$ ومقدارها 5.06 تقريباً . كما يوجد للدالة قيمة صغرى محلية عند $x=1.45$ ومقدارها 1.24 تقريباً . لاحظ كذلك أن

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \ , \ \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

تحقق من فهمك

4 **صناعة:** يرغب صاحب مصنع زجاج إنتاج كأس أُسطوانية الشكل مفتوحة من أعلى مساحتها الكلية $10\pi \text{ in}^2$. أوجد طول نصف قطر الكأس وارتفاعه اللذين يجعلان حجمها أكبر ما يمكن.

4 $r = 1.83$ in
$h = 1.82$ in

أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x)$ في كلٍّ من الفترتين الآتيتين:

5A $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2, [2, 3]$

5B $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x, [-5, -3]$

5A 6

5B 220-

تحقق من فهمك

6 **فيزياء:** قُذِفَ جسم إلى أعلى من ارتفاع 4 أقدام عن سطح الأرض، فإذا كان ارتفاع الجسم عن سطح الأرض يُعطى بالدالة $d(t) = -16t^2 + 20t + 4$، حيث t الزمن بالثواني بعد قذف الجسم و $d(t)$ المسافة التي يقطعها الجسم، فأوجد سرعة الجسم المتوسطة في الفترة من 0.5 إلى 1 ثانية على فرض إهمال مقاومة الهواء. وبرر إجابتك.

الحل

6 6

الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

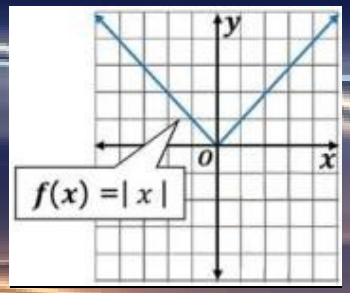
1-5

تحقق من فهمك

صف خصائص منحنى الدالة $f(x)$: المجال، والمدى، والمقطع x ، والمقطع y ، والتماثل، والاتصال، وسلوك طرفي التمثيل البياني، و فترات التزايد والتناقص.

1A $f(x) = |x|$

1A



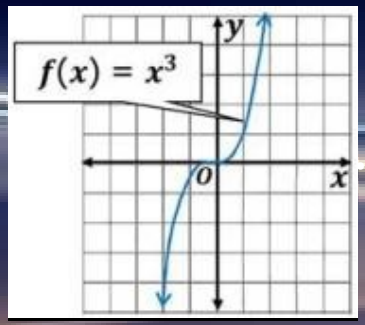
- مجال الدالة $\{ x \mid x \in R\}$, ومداها $\{ y \mid y \geq 0, y \in R\}$
- المنحنى مقطع واحد عند (0,0).
- منحنى الدالة متماثل حول y؛ لذا فالدالة زوجية.
- المنحنى متصل عند جميع قيم المجال .
- يبدأ المنحنى عند x=0 . وينتهي بـ
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$.
- المنحنى متناقص في الفترة $(-\infty, 0)$, متزايد في الفترة $(0, \infty)$

عودة لفهرس الفصل (1)

1B

$f(x) = x^3$

1B



- مجال الدالة $\{ x \mid x \in R \}$, ومداها $\{ y \mid y \in R \}$
- يقطع المنحنى المحورين عند النقطة (0,0).
- المنحنى متماثل حول نقطة الأصل ؛ لذا فالدالة فردية.
- المنحنى متصل عند جميع قيم المجال .
- يبدأ المنحنى عند x=0 . وينتهي بـ
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.
- المنحنى متزايد على الفترة $(-\infty, \infty)$.

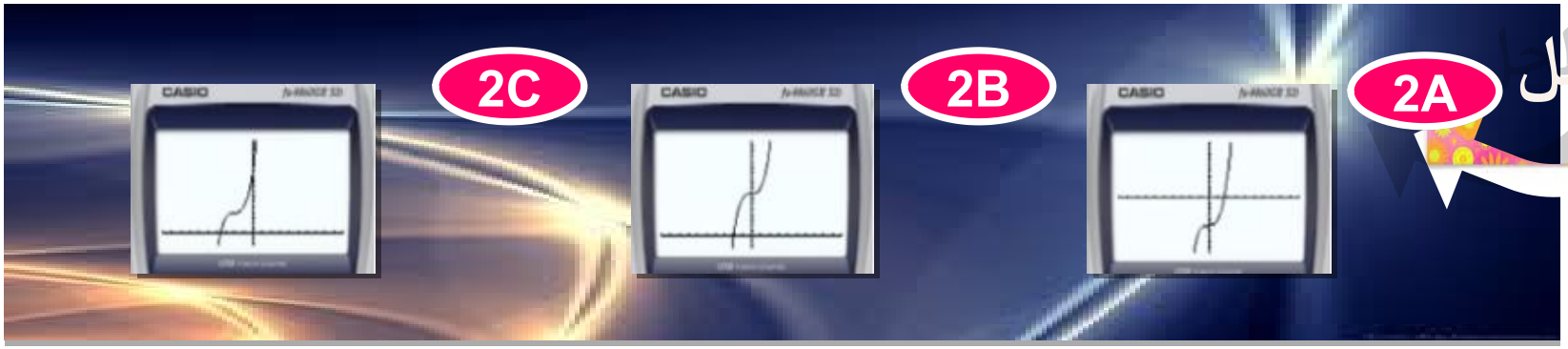
تحقق من فهمك

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^3$ لتمثيل كل دالة من الدوال الآتية بيانيًّا:

2A $h(x) = x^3 - 5$

2B $h(x) = 8 + x^3$

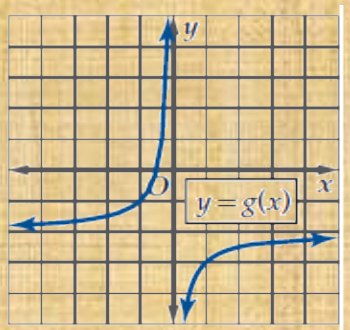
2C $h(x) = (x + 2)^3 + 4$



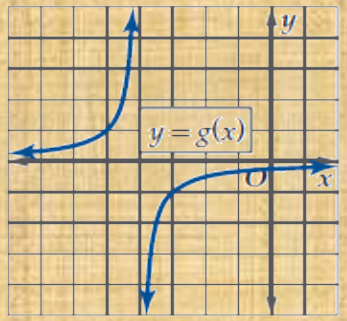
تحقق من فهمك

صف العلاقة بين منحنيي $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x)$ ثم اكتب معادلة $g(x)$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين :

3A



3B



3A

منحنى الدالة g هو انعكاس لمنحنى f(x) حول المحور y ثم انسحاب وحدتين إلى الأسفل،

أي أن $g(x) = \frac{-1}{x} - 2$

3B

منحنى الدالة g هو انعكاس لمنحنى f(x) حول المحور y ثم انسحاب أربع وحدات إلى اليمين،

أي أن $g(x) = \frac{-1}{x}$

تحقق من فهمك

عيِّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم صف العلاقة بين المنحنيين ومثلهما بيانيًّا في المستوى الإحداثي.

4A $g(x) = [\![x]\!] - 4$

4B $g(x) = \frac{15}{x} + 3$

الحل

4A منحنى الدالة g هو انسحاب

لمنحنى $f(x) = |x|$ بمقدار

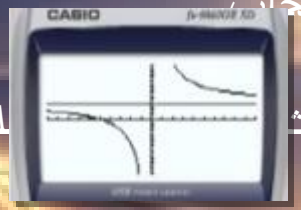
وحدات إلى الأسفل

4B منحنى الدالة g هو توسع

رأسي لمنحنى $f(x) = \frac{1}{x}$ ثم

انسحاب

ثلاث



تحقق من فهمك

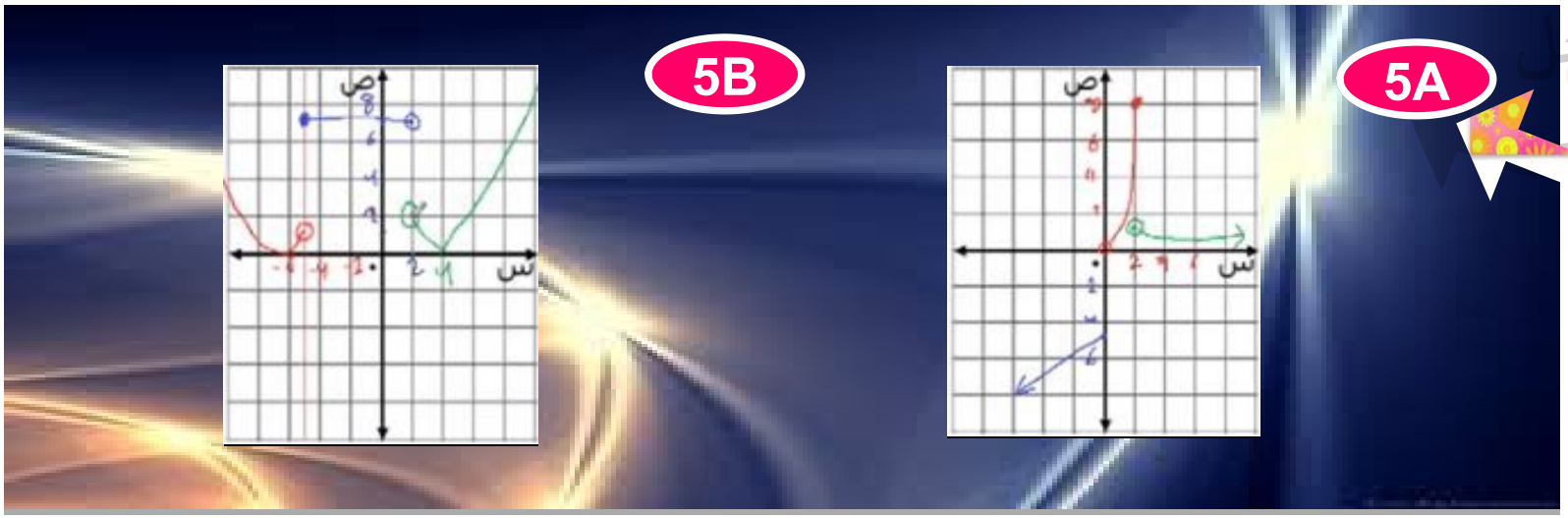
مثّل الدالة بيانيًّا:

5B

$$h(x)=\begin{cases}(x+6)^2 & , \quad x<-5\\ 7 & , \quad -5\le x\le 2\\ |4-x| & , \quad x>2\end{cases}$$

5A

$$g(x)=\begin{cases}x-5 & , \quad x\le 0\\ x^3 & , \quad 0<x\le 2\\ \frac{2}{x} & , \quad x>2\end{cases}$$



تحقق من فهمك

كهرباء: إذا كانت شدة التيار $I(x)$ بالأمبير الذي يمر بجهاز DVD تعطى بالدالة $I(x) = \sqrt{\frac{x}{11}}$، حيث x القدرة بالواط والعدد 11 هو المعاومة بالأوم.

6A صف التحويلات التي تمت على الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ للحصول على الدالة $I(x)$.

6B اكتب دالة تصف مرور تيار في مصباح مقاومته 15 أوم.

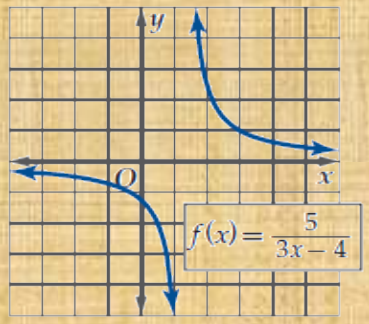
6A منحنى الدالة I هو توسع لمنحنى $f(x)= \sqrt{x}$ بمقدار $\frac{1}{\sqrt{11}}$

6B $I(x)= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{11}}$

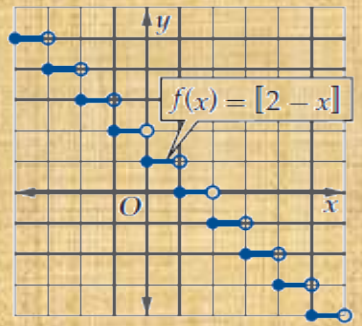
تحقق من فهمك

استعمل منحنى الدالة $f(x)$ في كلٍّ من الشكلين أدناه لتمثيل كلٍّ من الدالتين $g(x) = |f(x)|$ و $h(x) = f(|x|)$ بيانيًّا:

7A

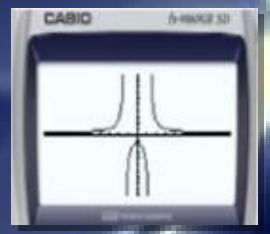


7B

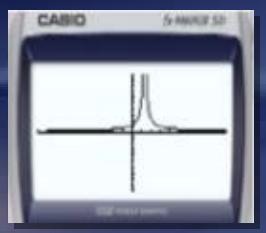


الحل

7A

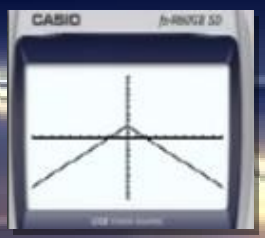


g(x)

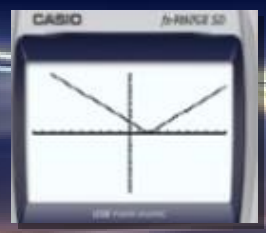


h(x)

7B



g(x)



h(x)

العمليات على الدوال وتركيب دالتين

1-6

تحقق من فهمك

أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ في كل مما يأتي، ثم أوجد مجال كل دالة من الدوال الناتجة.

1A $f(x) = x - 4, g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

1B $f(x) = x^2 - 6x - 8, g(x) = \sqrt{x}$

الحل

1A

$(f+g)(x) = x-4 + \sqrt{9-x}$

مجال الدالة f هو $(-\infty,\infty)$,
ومجال الدالة g هو $[-3,3]$ ؛
لذا فإن مجال الدالة (f+g) هو تقاطع مجالي f,g وهو $[-3,3]$

$(f-g)(x) = x-4 - \sqrt{9-x}$

مجال الدالة f هو $(-\infty,\infty)$,
ومجال الدالة g هو $[-3,3]$ ؛
لذا فإن مجال الدالة (f-g) هو تقاطع مجالي f,g وهو $[-3,3]$

عودة لفهرس الفصل (1)

تابع 1A

1A

$(f \bullet g)(x) = \sqrt{9-x}\sqrt{9-x} - 4 = x$

المجال هو $[-3,3]$.

$(f)(x) = x - 4$

$g \quad \sqrt{9 - x^2}$

المجال هو $(-3,3)$.

1B

$f(x) = x^2 - 6x - 8, g(x) = \sqrt{x}$

1B

$(f+g)(x) = x^2 - 6x - 8 + \sqrt{x}$

المجال هو $[0, \infty)$.

$(f \bullet g)(x) = \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x} - 6x\sqrt{x} - 8\sqrt{x}$

المجال هو $[0, \infty)$.

$(f-g)(x) = x^2 - 6x - 8 - \sqrt{x}$

المجال هو $[0, \infty)$.

$(f)(x) = x^2 - 6x - 8$

$g \quad \sqrt{x}$

المجال هو $(0, \infty)$.

تحقق من فهمك

أوجد $[f \circ g](3), [g \circ f](x), [f \circ g](x)$ في كل مما يأتي:

2A $f(x) = 3x + 1, g(x) = 5 - x^2$

2B $f(x) = 6x^2 - 4, g(x) = x + 2$

الحل

2A

$|f \circ g|(x) = 16 - 3x^2$

$|g \circ f|(x) = -9x^2 - 6x - 4$

$|f \circ g|(3) = -11$

2B

$|f \circ g|(x) = 6x^2 + 24x + 20$

$|g \circ f|(x) = 6x^2 - 2$

$|f \circ g|(3) = 146$

تحقق من فهمك

حدّد مجال الدالة $f \circ g$ متضمنًا القيود الضرورية، ثم أوجد $f \circ g$ في كل من الحالتين الآتيتين:

3A $f(x) = \sqrt{x+1}, g(x) = x^2 - 1$

3B $f(x) = \frac{5}{x}, g(x) = x^2 + x$

الحل

3A $|f \circ g|(x) = x$

المجال هو $\{x \mid x \in R\}$

3B $|f \circ g|(x) = \frac{5}{x^2+x}$

المجال هو $\{x \mid x \neq 0, x \neq -1, x \in R\}$

تحقق من فهمك

أوجد دالتين f و g بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$. وعلى ألّا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$ في كلٍّ مما يأتي:

4A $h(x) = x^2 - 2x + 1$

4B $h(x) = \frac{1}{x+7}$

4A $g(x) = x-1$, $f(x) = x^2$

4B $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x+7$

تحقق من فهمك

أعمال: أعلن محل تجاري عن خصم مقداره 15% على ثمن أجهزة الحاسوب لطلاب الجامعات، كما وزّع قسائم يستفيد حاملها بخصم مقداره 100 ريال من ثمن الحاسوب.

5A عبّر عن هذه البيانات بدالتين c و d .

5B أوجد $[c \circ d](x)$ و $[d \circ c](x)$. وماذا يعني كلٌّ منهما؟

5C أي التركيبين $c \circ d$ أو $d \circ c$ يعطي سعرًا أقل؟ وضح إجابتك.

الحل

5A $d(x) = 0.85x$, $c(x) = x-100$

5B $|d \circ c|(x) = 0.85x-100$,

(معناها خصم 15% أولاً ثم خصم 100 ريال)

$|d \circ c|(x) = 0.85x-85$,

(معناها خصم 100 ريال أولاً ثم خصم 15%)

5C $|d \circ c|$ تعطي سعرًا أقل

1-7 العلاقات والدوال العكسية

تحقق من فهمك

مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانيّة، ثم طبق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة، أم لا.

1A $h(x) = \frac{4}{x}$

1B $f(x) = x^2 + 5x - 7$

الحل

1A بتطبيق اختبار الخط الافقي نجد أنه يوجد للدالة معكوس

1B بتطبيق اختبار الخط الافقي نجد أنه لا يوجد للدالة معكوس

عودة لفهرس الفصل (1)

تحقق من فهمك

في كل مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن، وحدد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب غير موجودة.

2A $f(x) = -16 + x^3$

2B $f(x) = \frac{x+7}{x}$

2C $f(x) = \sqrt{x^2 - 20}$

الحل

2A

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+16}$

المجال والمدى هما جميع الأعداد الحقيقية (لا يوجد قيود)

2B

$f^{-1}(x) = \frac{7}{x-1}$

المجال $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

المدى $\{x \mid x \neq 1, x \in R\}$

2C

لا يوجد للدالة معكوس

تحقق من فهمك

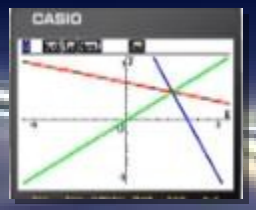
أثبت جبريًا أن كلًّا من الدالتين f, g تمثل دالة عكسية للأخرى في كل مما يأتي:

3A $f(x) = 18 - 3x, g(x) = 6 - \frac{x}{3}$

3B $f(x) = x^2 + 10, x \geq 0, g(x) = \sqrt{x - 10}$

الحل

3A بما أن $f[g(x)] = g[f(x)] = x$ فإن كلاً من الدالتين $f(x), g(x)$ تكون عكسية للأخرى
ويؤكد التمثيل البياني المجاور هذه الإجابة

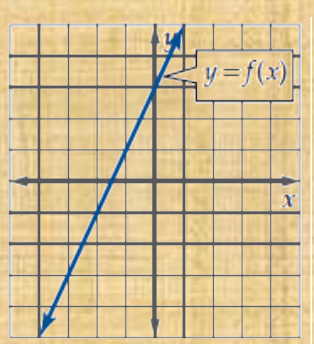


3B بما أن $f[g(x)] = g[f(x)] = x$ فإن كلاً من الدالتين $f(x), g(x)$ تكون عكسية للأخرى
ويؤكد التمثيل البياني المجاور هذه الإجابة

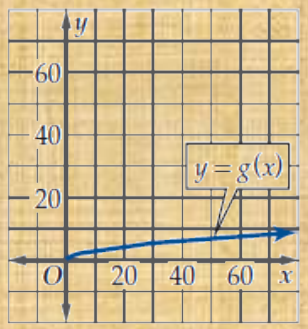
تحقق من فهمك

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتمثيل الدالة العكسية لها بيانيًا:

4A

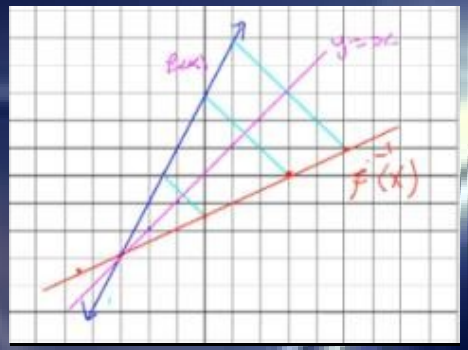


4B



الحل

4A



4B

تحقق من فهمك

توفير: يتبقى لأحمد بعد سداد أقساط منزله وبعض الالتزامات 65% من راتبه الشهري، فإذا خصّص منها 1800 ريال لنفقات المعيشة، وقدّر أن بإمكانه توفير 20% من المبلغ المتبقي تقريبًا، فإن مقدار التوفير الشهري يعطى بالدالة: $f(x) = 0.2(0.65x - 1800)$.

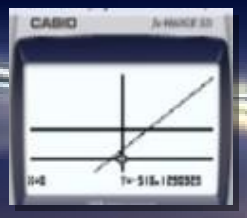
5A أثبت أن $f^{-1}(x)$ موجودة، ثم أوجدها.

5B ماذا تمثّل كل من $x, f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية؟

5C حدد أية قيود على كل من مجال $f^{-1}(x), f(x)$ إن وجدت. وبرر إجابتك.

5D إذا وفّر أحمد 500 ريالًا في الشهر، فأوجد راتبه الشهري.

الحل



5A يحقق منحنى الدالة f(x) اختبار الخط الافقي وعليه فإنه يوجد معكوس للدالة

$$f^{-1}(x) = \frac{x+360}{0.13}$$

5B

x تمثل مقدار التوفير في الشهر.

$f^{-1}(x)$ تمثل التبرع في الشهر.

5C

$f(x)$

المجال المناسب

$x \geq 2769.23$

5D

6615.38 ريال تقريباً.

الفصل (2)
العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

2-1

2-2

2-3

2-4

2-5

2-6

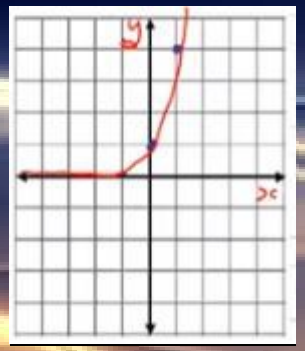
عودة لفهرس تحقق

2-1 تمثيل الدوال الأسية بيانياً

تحقق من فهمك

1 مثّل الدالة $y = 4^x$ بيانيًا، وحدد مجالها ومداها.

الحل



1 المجال $(-\infty,\infty)$
المدى $(0,\infty)$

عودة لفهرس الفصل (2)

تحقق من فهمك

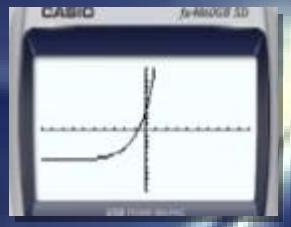
مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدد مجالها، ومداها:

2A $y = 2^{x+3} - 5$

2B $y = 0.1(6)^x - 3$

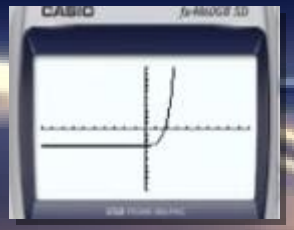
الحل

2A



المجال $(-\infty,\infty)$
المدى $(-5,\infty)$

2B

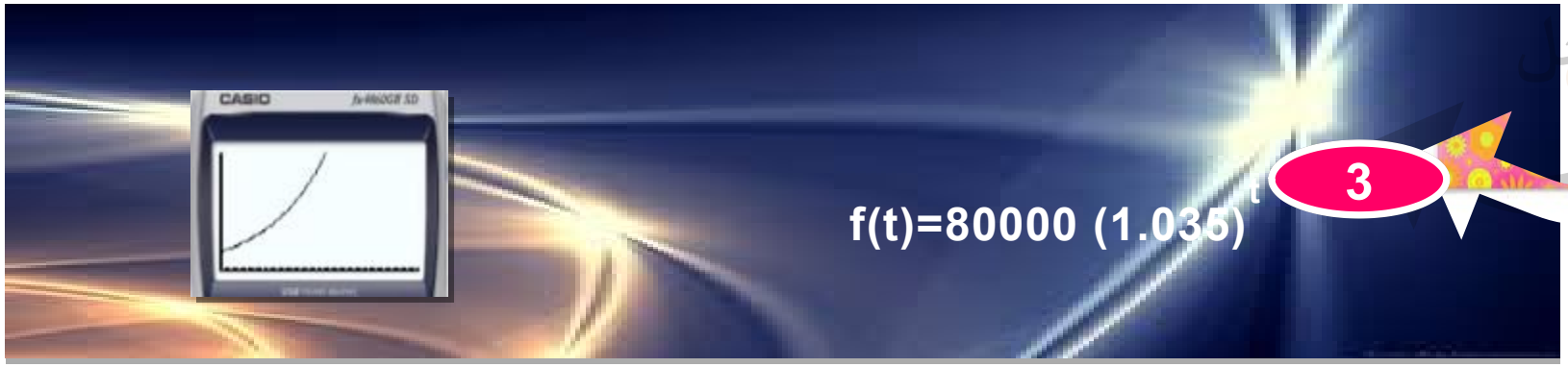


المجال $(-\infty,\infty)$
المدى $(-3,\infty)$

تحقق من فهمك

3

ثقافة مالية : يتوقع أن يزداد إنفاق عائلة بما نسبته 3.5% سنويًا، إذا كان إنفاق العائلة عام 1425 هـ هو 80000 ريال. فأوجد معادلة أسية تمثل إنفاق العائلة منذ عام 1425 هـ، ثم مثلها بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية.



تحقق من فهمك

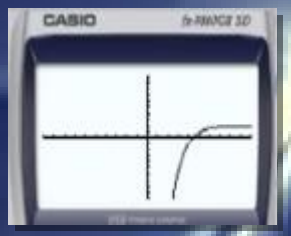
مثّل الدالتين الآتيتين بيانيًّا، وحدد مجال، ومدى كل منهما:

4A $y = -3\left(\frac{2}{5}\right)^{x-4} + 2$

4B $y = \frac{3}{8}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} + 1$

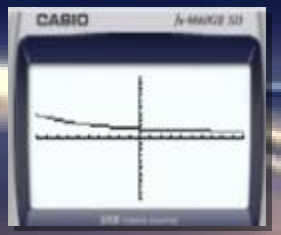
الحل

4A



المجال $(-\infty,\infty)$
المدى $(-\infty, 2)$

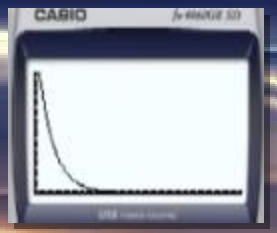
4B



المجال $(-\infty,\infty)$
المدى $(\infty, 1)$

تحقق من فهمك

5 يحتوي كوب الشاي الأسود على 68mg من الكافايين. أوجد معادلة أسية تمثل كمية الكافيين المتبقية في جسم شخص يافع بعد شربه كوبًا من الشاي الأسود، ومثلها بيانيًا مستعملًا الحاسبة البيانية، ثم قدّر كمية الكافيين المتبقية في جسمه بعد ساعتين من شربه الكوب.



الحل

5

$f(t)=68(0.875)^t$

بعد ساعتين

$f(t)=68(0.875)^2 \approx 52.06$

حل المعادلات والمتباينات الأسية

2-2

تحقق من فهمك

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

1A $4^{2n-1} = 64$

1B $5^{5x} = 125^{x+2}$

الحل

1A $n=2$

1B $x=3$

عودة لفهرس الفصل (2)

تحقق من فهمك

إعادة تصنيع: أنتج مصنع 3.2 ملايين عبوة بلاستيكية عام 1426 هـ ، وفي عام 1430 هـ أنتج 420000 عبوة بإعادة تصنيع العبوات التي أنتجها عام 1426 هـ.

2A مفترضًا أن إعادة التصنيع استمرت بالمعدل نفسه، اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ تمثل عدد العبوات المعادة تصنيعها y بعد x سنة.

2B كم تتوقع أن يكون عدد العبوات مُعادة التصنيع عام 1471 هـ؟

الحل

2A $y=3200000(0.60)^x$

2B لا ينتج للمصنع أي شئ في عام 1471هـ

تحقق من فهمك

3 استثمر علي مبلغ 100000 ريال في مشروع تجاري متوقعًا ربحًا سنويًا نسبته 12%، بحيث تضاف الأرباح إلى رأس المال مرتين شهريًا. كم المبلغ الكلي المتوقع بعد 5 سنوات إلى أقرب منزلتين عشريتين.

الحل

3 181939.67 ريال تقريباً

تحقق من فهمك

حُلّ المتباينة

4A $3^{2x-1} \geq \frac{1}{243}$

4B $2^{x+2} > \frac{1}{32}$

الحل

4A $x \geq -2$

4B $X > -7$

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

2-3

تحقق من فهمك

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية:

1A $\log_4 16 = 2$

1B $\log_3 729 = 6$

الحل

1A $16 = 4^2$

1B $729 = 3^6$

عودة لفهرس الفصل (2)

تحقق من فهمك

اكتب كل معادلة أسّية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية:

2A $4^3 = 64$

2B $125^{\frac{1}{3}} = 5$

الحل

2A $\log_4 64 = 3$

2B $\log_{125} 5 = \frac{1}{3}$

أوجد قيمة كل مما يأتي:

3A $\log_3 81$

3B $\log_{\frac{1}{2}} 256$

الحل

3A 4

3B -8

تحقق من فهمك

أوجد قيمة كل مما يأتي:

4A $\log_9 81$

4B $3^{\log_3 1}$

4A 2

4B 1

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

5A $f(x) = \log_2 x$

5B $f(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$

تحقق من فهمك

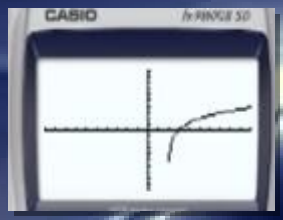
مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا:

6A $f(x) = 2\log_3(x-2)$

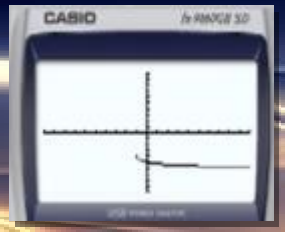
6B $f(x) = \frac{1}{4}\log_{\frac{1}{2}}(x+1) - 5$

الحل

6A



6B



7 أوجد معادلة لمعكوس الدالة $y = 0.5^x$

الحل

7 $y = \log_{0.5} x$

2-4 خصائص اللوغاريتمات

تحقق من فهمك

1 استعمل $\log_4 2 = 0.5$ لإيجاد قيمة $\log_4 32$.

الحل

1

0.5

عودة لفهرس الفصل (2)

تحقق من فهمك

2 **صوت:** يقاس ارتفاع الصوت L بالديسبل (dB)، ويعطى بالصيغة $L = 10 \log_{10} R$، حيث R شدة الصوت النسبية. أوجد الشدة النسبية لصوت ارتفاعه 120 dB.

الحل

2 10^{12}

تحقق من فهمك

3 إذا كان $\log_3 7 \approx 1.7712$، فقرّب قيمة $\log_3 49$.

الحل

3 ≈ 3.5424

تحقق من فهمك

احسب قيمة

4A $\log_6 \sqrt[3]{36}$

4B $\log_7 \sqrt[6]{49}$

الحل

4A $\frac{2}{3}$

4B $\frac{1}{3}$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة:

5A $\log_{13} 6a^3bc^4$

5B $\log_6 5x^3y^7z^{0.5}$

الحل

5A $\log_{13} 6 + 3\log_{13} a + \log_{13} b + 4\log_{13} c$

5B $\log_6 5 + 3\log_6 x + 7\log_6 y + \frac{11}{2}\log_6 z$

تحقق من فهمك

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

6A $-5\log_2(x+1)+3\log_2(6x)$

6B $\log_3(2x-1)-\frac{1}{4}\log_3(x+1)$

الحل

6A $\log_{13} 6$

6B $\log_2 \frac{216x^7}{(x+1)^5}$

حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

2-5

تحقق من فهمك

حُلّ المعادلة

1A $\log_9 x = \frac{3}{2}$

1B $\log_{16} x = \frac{5}{2}$

الحل

1A 27

1B 1024

عودة لفهرس الفصل (2)

تحقق من فهمك

2 حُلّ المعادلة $\log_3 (x^2 - 15) = \log_3 2x$.

F -3 G -1 H 5 J 15

الحل

2 — 5

3A حُلّ المعادلة $2 \log_7 x = \log_7 27 + \log_7 3$

3B حُلّ المعادلة $\log_6 x + \log_6 (x + 5) = 2$

الحل

3A — X=9 √ ، X=-9 (حل مرفوض)

3B — X=4 √ ، X=-9 (حل مرفوض)

تحقق من فهمك

حُلّ المتباينة

4A $\log_4 x \geq 3$

4B $\log_2 x < 4$

الحل

4A $X \geq 64$

4B $X < 16$

5 حل المتباينة $\log_5 (2x + 1) \leq \log_5 (x + 4)$

الحل

5 $X \leq 3$

اللوغاريتمات العشرية

2-6

تحقق من فهمك

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

1A log 7

1B log 0.5

الحل

1A ≈ 0.8451

1B ≈ -0.3010

عودة لفهرس الفصل (2)

تحقق من فهمك

2 **هزات أرضية:** ترتبط كمية الطاقة E مقيسة بوحدة الإيرج التي تطلقها الأرض مع قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر M بالمعادلة $\log E = 11.8 + 1.5M$. استعمل المعادلة لتجد كمية الطاقة التي تطلقها الأرض عند هزة أرضية بقوة 9 درجات على مقياس ريختر.

الحل

2 ليرج تقريباً 2×10^{25}

حُلّ المعادلة

3A $3^x = 15$

3B $6^x = 42$

الحل

3A $X \approx 2.4650$

3B $X \approx 2.0860$

تحقق من فهمك

حل المتباينة

4A $3^{2x} \geq 6^{x+1}$

4B $4y < 5^{2y+1}$

الحل

4A $\{x \mid x \geq 4.4190\}$

4B $\{y \mid y \geq -0.8782\}$

5 اكتب $\log_6 8$ بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

الحل

5 ≈ 1.1606

تحقق من فهمك

6 حدد الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 160 خطوة.

6 ثـانية ≈ 7.32

الفصل (3)
المتطابقات والمعادلات المثلثية

3-1

3-2

3-3

3-4

3-5

عودة لفهرس تحقق

المتطابقات المثلثية

3-1

تحقق من فهمك

1A أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{3}$, $270^\circ < \theta < 360^\circ$.

1B أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sec\theta$ إذا كان $\sin\theta = -\frac{2}{7}$, $180^\circ < \theta < 270^\circ$.

الحل

1A $= -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

1B $= -\frac{7\sqrt{5}}{15}$

عودة لفهرس الفصل (3)

تحقق من فهمك

بسّط العبارة :

2A $\dfrac{\tan^2\theta\csc^2\theta-1}{\sec^2\theta}$

2B $\dfrac{\sec\theta}{\sin\theta}(1-\cos^2\theta)$

الحل

2A $\sin^2\theta$

2B $\tan\theta$

3 أعد كتابة $\cot^2\theta-\tan^2\theta$ بدلالة $\sin\theta$.

الحل

3 $\dfrac{1-2\sin^2\theta}{\sin^2\theta-\sin^4\theta}$

اثبات صحة المتطابقات المثلثية

3-2

تحقق من فهمك

1 أثبت أن المعادلة $\cot^2\theta - \cos^2\theta = \cot^2\theta\cos^2\theta$ تمثل متطابقة.

الحل

1

$$\cot^2\theta - \cos^2\theta = \cos^2\theta\left(\frac{1}{\sin^2\theta} - 1\right)$$
$$= \cos^2\theta(\csc^2\theta - 1)$$
$$= \cot^2\theta\cos^2\theta$$

عودة لفهرس الفصل (3)

تحقق من فهمك

2 أي مما يأتي يكافئ العبارة $\tan^2\theta(\cot^2\theta - \cos^2\theta)$؟

A $\cot^2\theta$ **B** $\tan^2\theta$ **C** $\cos^2\theta$ **D** $\sin^2\theta$

الحل

2 $\cos^2\theta$

3 أثبت أن المعادلة $\csc^2\theta - \cot^2\theta = \cot\theta\tan\theta$ تمثل متطابقة.

الحل

3

$\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$\cot\theta\tan\theta = 1$

$\csc^2\theta - \cot^2\theta = \cot\theta\tan\theta$

المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

3-3

تحقق من فهمك

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

1A $\sin 15°$

1B $\cos(-15°)$

الحل

1A $\frac{\sqrt{6}}{4}$

1B $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

عودة لفهرس الفصل (3)

تحقق من فهمك

إذا كانت شدة التيار c تعطى بالصيغة $c = 2 \sin 285t$ ، فأجب عما يأتي:

2A أعد كتابة الصيغة، باستعمال الفرق بين زاويتين.

2B استعمل المتطابقة المثلثية للفرق بين زاويتين؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

الحل

2A $2[\sin 315^o \cos 30^o - \cos 315^o \sin 30^o]$

2B $\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

تحقق من فهمك

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة:

3A $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

3B $\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$

الحل

3A

$$= \sin 90^o \cos\theta^o - \cos 90^o \sin\theta^o$$
$$= (1)\cos\theta^o - (0)\sin\theta^o$$
$$= \cos\theta$$

3B

$$= \cos 90^o \cos\theta^o - \sin 90^o \sin\theta^o$$
$$= (0)\cos\theta^o - (1)\sin\theta^o$$
$$= -\sin\theta$$

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

3-4

تحقق من فهمك

1 أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ ، علمًا بأن $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ، $\cos \theta = -\frac{1}{3}$.

الحل

1 $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$

عودة لفهرس الفصل (3)

تحقق من فهمك

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي علمًا بأن $90° < \theta < 180°$ ؛ $\cos\theta = -\frac{1}{3}$:

2A $\cos 2\theta$

2B $\tan 2\theta$

الحل

2A $\frac{-7}{9}$

2B $\frac{4\sqrt{2}}{7}$

3 أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\frac{\theta}{2}$ ، علمًا بأن $\sin\theta = \frac{2}{3}$ ، θ تقع في الربع الثاني.

الحل

3 $\frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{6}$

تحقق من فهمك

أوجد قيمة كل مما يأتي:

4A $\sin 135°$

4B $\sin 15 \cos 15$

الحل

4A $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4B $\frac{1}{4}$

5 أثبت أن المعادلة $4\cos^2 x - \sin^2 2x = 4\cos^4 x$ تمثّل متطابقة.

الحل

5

$$= 4\cos^2 x - (2\sin x \cos x)^2$$
$$= 4\cos^2 x\,(1 - \sin^2 x)$$
$$= 4\cos^2 x\,(\cos^2 x)$$
$$= 4\cos^4 x$$

3-5 حل المعادلات المثلثية

تحقق من فهمك

1 حُلّ المعادلة $\sin 2\theta = \cos \theta$، إذا كانت $0 \le \theta \le 2\pi$.

الحل

1 الحلول هي $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

عودة لفهرس الفصل (3)

تحقق من فهمك

2A حُلّ المعادلة $\cos 2\theta + \cos \theta + 1 = 0$ لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالدرجات.

2B حُلّ المعادلة $2 \sin \theta = -1$ لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالراديان.

الحل

2A الحلول هي $240 + k.360^o$ و $120 + k.360^o$

2B $-\frac{\pi}{6}$ و $-\frac{5\pi}{6}$

3 كم من الوقت تحتاج من بداية دوران العجلة ، ليكون ارتفاع مقعدك 41 مترًا فوق سطح الأرض للمرة الأولى؟

الحل

3 210° و 330°

تحقق من فهمك

حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

4A $\sin^2\theta + 2\cos^2\theta = 4$

4B $\cos^2\theta + 3 = 4 - \sin^2\theta$

الحل

4A لا يوجد حل

4B عدد لا نهائي من الحلول

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالراديان:

5A $\sin\theta\cot\theta - \cos^2\theta = 0$

5B $\frac{\cos\theta}{\cot\theta} + 2\sin^2\theta = 0$

الحل

5A $\frac{\pi}{2} + \pi k$

5B $\frac{7\pi}{6} + 2\pi k$,
$\frac{11\pi}{6} + 2\pi k$

الفصل (4)
القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

4-1

4-2

4-3

4-4

4-5

عودة لفهرس تحقق

4-1 القطوع المكافئة

تحقق من فهمك

حدّد خصائص القطع المكافئ ثم مثّل منحناه بيانيًّا.

1A $8(y+3)=(x-4)^2$

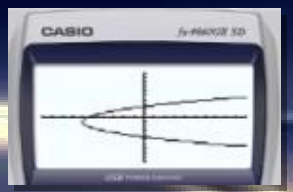
1B $2(x+6)=(y+1)^2$

الحل

1A

المنحنى مفتوح رأسياً
الرأس (4,-3), البؤرة (4,-1)
محور التماثل $x=4$, الدليل $y=-5$
طول الوتر البؤري 8

1B



المنحنى مفتوح أفقياً
الرأس (-6,-1), البؤرة (-5.5,-1)
محور التماثل $y=-1$, الدليل $x=-6.5$

عودة لفهرس الفصل (4)

تحقق من فهمك

2 **فلك:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. افترض أنه يمكن تمثيل التلسكوب الظاهر في الصورة باستعمال المعادلة $x^2 = 44.8(y - 6)$، حيث $-5 \le x \le 5$. إذا كانت x, y بالأقدام، فما أقصر مسافة بين سطح مرآة الزئبق وآلة التصوير؟

تحقق من فهمك

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدد خصائص القطع المكافئ، ومثّل منحناه بيانيًّا.

3A $x^2 - 4y + 3 = 7$

3B $3y^2 + 6y + 15 = 12x$

الحل

3A $X^2=4(y+1)$

المنحنى مفتوح رأسياً
الرأس (0,-1), البؤرة (0,0)
محور التماثل x=0, الدليل y=-2
طول الوتر البؤري 4

3B $(y+1)^2=4(x-1)$

المنحنى مفتوح أفقياً
الرأس (-6,-1), البؤرة (-5.5,-1)
محور التماثل y=-1, الدليل x=-6.5
طول الوتر البؤري 2

تحقق من فهمك

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًّا:

4A البؤرة $(-6, 2)$ والرأس $(-6, -1)$

4B البؤرة $(-2, 5)$ والرأس $(-2, 9)$

4C البؤرة $(-4, -3)$ ، والمنحنى مفتوح إلى أسفل، ويمر بالنقطة $(-10, 5)$.

4D البؤرة $(5, -1)$ ، والمنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمر بالنقطة $(-7, 8)$.

الحل

4A $(X+6)^2=12(y+1)$

4B $(y+2)^2=-12(x-9)$

4C $(X+3)^2=-8(y+2)$

4D $(y-5)^2=12(x+4)$

تحقق من فهمك

5A اكتب معادلة مماس منحنى القطع المكافئ $y = 4x^2 + 4$ عند النقطة $(-1, 8)$

5B اكتب معادلة مماس منحنى القطع المكافئ $x = 5 - \frac{y^2}{4}$ عند النقطة $(1, -4)$

الحل

5A $y=-8x$

5B $y=\frac{1}{2}x-\frac{9}{2}$

القطوع الناقصة والدوائر

4-2

تحقق من فهمك

حدِّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا:

1A $\frac{(x-6)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{16}=1$

الحل

1A

الاتجاه: رأسي، المركز: (6,-3)

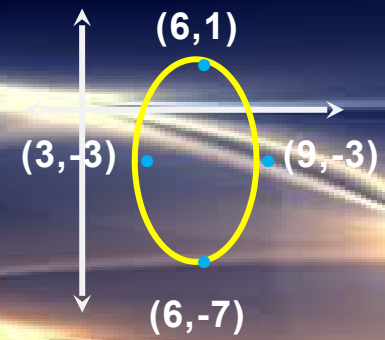
البؤرتان: $(6,-3\pm\sqrt{7})$

الرأسان: (6,1), (6,-7)

الرأسان المرافقان: $(6\pm3,-3)$

المحور الأكبر: $Y=-3$، طوله 8

المحور الأصغر: $X=6$، طوله 6



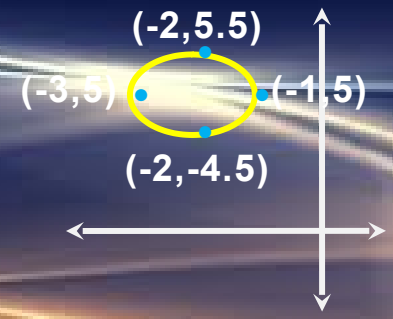
عودة لفهرس الفصل (4)

$$x^2 + 4y^2 + 4x - 40y + 103 = 0$$

1B

الحل

1B



الاتجاه: أفقي, المركز: $(-2,5)$

البؤرتان: $(-2\pm\sqrt{3},5)$

الرأسان: $(-2\pm1,5)$

الرأسان المرافقان: $(-2,5\pm\frac{1}{2})$

المحور الأكبر $y=5$ ، طوله 2

المحور الأصغر $x=-2$ ، طوله 1

تحقق من فهمك

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

2A البؤرتان $(-7, 3)$, $(19, 3)$ ؛ وطول المحور الأكبر 30 وحدة.

2B الرأسان $(-2, 8)$, $(-2, -4)$ ؛ وطول المحور الأصغر 10 وحدة.

الحل

2A

$$\frac{(x-6)^2}{22.5} + \frac{(y-3)^2}{56} = 1$$

2B

$$\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{36} = 1$$

تحقق من فهمك

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

3A $\frac{x^2}{18} + \frac{(y+8)^2}{48} = 1$

3B $\frac{(x-4)^2}{19} + \frac{(y+7)^2}{17} = 1$

الحل

3A ≈0.79

3B ≈0.32

4 الاختلاف المركزي لعين مصابة بقصر النظر هو 0.39. فإذا كان عمق العين 25 mm، فما ارتفاعها؟

الحل

4 ≈23.02

تحقق من فهمك

5A اكتب معادلة الدائرة التي مركزها (0 ,0) و نصف قطرها 3 .

5B اكتب معادلة الدائرة التي مركزها (5 ,0) وقطرها 10 .

الحل

5A $x^2+y^2=9$

5B $(x-5)^2+y^2=25$

6 أوجد معادلة دائرة، إذا كان طرفا قطر فيها $(1, 5), (3, -3)$.

الحل

6 $(x-2)^2+(y-1)^2=17$

4-3 القطوع الزائدة

تحقق من فهمك

1A حدِّد خصائص القطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$ ، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

1A

الاتجاه: أفقي، المركز: $(0,0)$

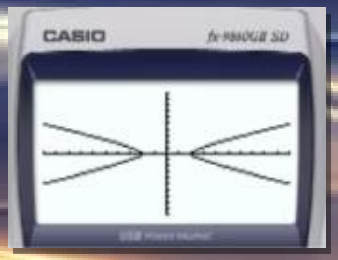
الرأسان: $(\pm 2, 0)$

البؤرتان: $(\pm\sqrt{5}, 0)$

المحور القاطع $y=0$

المحور المرافق $x=0$

خطا التقارب $y=\pm\frac{1}{2}x$



عودة لفهرس الفصل (4)

1B حدِّد خصائص القطع الزائد الذي معادلته $\frac{(y+4)^2}{64} - \frac{(x+1)^2}{81} = 1$، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

الحل

1B

الاتجاه: رأسي، المركز: (-1, -4)

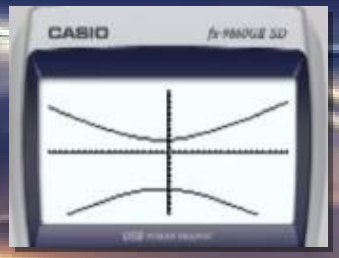
الرأسان: (-1, -4 ± 8) = (-1, -12), (-1, 4)

البؤرتان: (-1, −4 ± √145) = (-1, −16.04), (-1, 8.04)

المحور القاطع x=-1

المحور المرافق y=-4

خطا التقارب $y+4=\pm\frac{8}{9}(x+1)$



تحقق من فهمك

اكتب معادلة القطع الزائد على الصورة القياسية، ثم حدِّد خصائصه ومثِّل منحناه بيانيًّا.

2A $4x^2 - 9y^2 - 8x - 36y = 68$

2B $2x^2 - 3y^2 - 12x - 36 = 0$

الحل

2A

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

الاتجاه: أفقي, المركز: $(1, -2)$

الرأسان: $(4, -2)$ ، $(-2, -2)$

البؤرتان: $(1 \pm \sqrt{13}, -2)$

المحور القاطع $y = -2$

المحور المرافق $x = 1$

خطا التقارب $y + 2 = \pm \frac{2}{3}(x - 1)$

2B

$$\frac{(x-3)^2}{27} - \frac{(y-0)^2}{18} = 1$$

الاتجاه: أفقي, المركز: $(3, 0)$

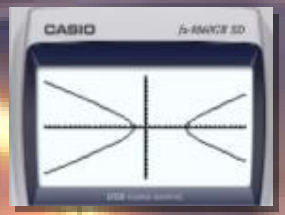
الرأسان: $(3 \pm 3\sqrt{3}, 0)$

البؤرتان: $(3 \pm 3\sqrt{5}, 0)$

المحور القاطع $y = 0$

المحور المرافق $x = 3$

خطا التقارب $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}(x - 3)$



تحقق من فهمك

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

3A الرأسان $(3, 6), (3, 2)$، وطول المحور المرافق 10 وحدات.

3B البؤرتان $(2-, 12), (2-, 2)$، وخطا التقارب $y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}, y = \frac{3}{4}x - \frac{29}{4}$.

الحل

3A

$$\frac{(y-4)^2}{4} + \frac{(x-3)^2}{25} = 1$$

3B

$$\frac{(x-7)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

تحقق من فهمك

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المغطاة معادلته في كل مما يأتي:

4A $\frac{(x+8)^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{80} = 1$

4B $\frac{(y-2)^2}{15} - \frac{(x+9)^2}{75} = 1$

الحل

4A 1.5

4B $\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{15}}$

تحقق من فهمك

ملاحة بحرية : تعطلت سفينة عند نقطة في عرض البحر، بحيث كان الفرق بين بعدي السفينة عن أقرب محطتين إليها 80 ميلًا بحريًا .

5A إذا كان موقعا المحطتين يمثلان بؤرتي قطع زائد تقع السفينة عليه، فاكتب معادلة القطع الزائد إذا كانت المحطتان تقعان عند النقطتين $(100, 0), (-100, 0)$.

5B أوجد إحداثيي موقع السفينة إذا كانت تقع على المستقيم الواصل بين البؤرتين، وكانت أقرب إلى المحطة التي إحداثياها $(100, 0)$.

الحل

5A $\frac{x^2}{1600} - \frac{y^2}{8400} = 1$

5B $(40, 0)$

4-4 تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها

تحقق من فهمك

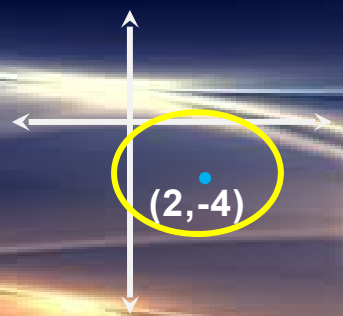
1 اكتب المعادلة $4x^2 + y^2 - 16x + 8y - 4 = 0$ على الصورة القياسية، ثم حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله، ومثّل منحناه بيانيًّا.

الحل

1

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{36} = 1$$

وهي معادلة قطع ناقص



عودة لفهرس الفصل (4)

تحقق من فهمك

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية:

2A $8y^2 - 6x^2 + 4xy - 6x + 2y - 4 = 0$

2B $3xy + 4x^2 - 2y + 9x - 3 = 0$

2B $3x^2 + 16x - 12y + 2y^2 - 6 = 0$

الحل

2A قطع زائد

2B قطع زائد

2C قطع ناقص

تحقق من فهمك

3 استعمل $\theta = \frac{\pi}{6}$ لكتابة الصورة القياسية للمعادلة $7x^2 + 4\sqrt{3}xy + 3y^2 - 60 = 0$ في المستوى $x'y'$.
ثم حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله.

الحل

3

$$\frac{x'^2}{\frac{60}{9}} + \frac{y'^2}{60} = 1$$

وهي معادلة قطع ناقص

4 إذا كانت معادلة الترس بعد دوران $30°$ في المستوى $x'y'$ هي $(x')^2 + 4(y')^2 - 40 = 0$،
فاكتب معادلة الترس في المستوى xy.

الحل

4

$7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 160 = 0$

المعادلات الوسيطية

4-5

تحقق من فهمك

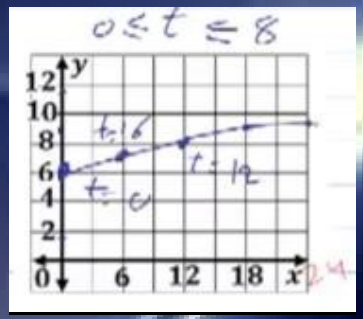
مثّل بيانيًّا المنحنى المعطى بالمعادلتين الوسيطيتين على الفترة المعطاة في كل مما يأتي:

1A $x = 3t, y = \sqrt{t} + 6; 0 \le t \le 8$

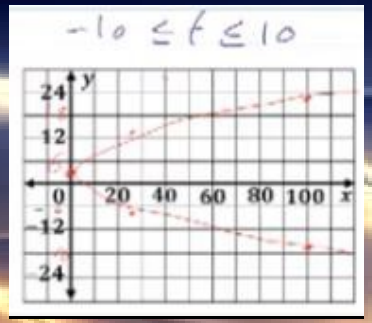
1B $x = t^2, y = 2t + 3; -10 \le t \le 10$

الحل

1A



1B



عودة لفهرس الفصل (4)

تحقق من فهمك

2 اكتب المعادلتين الوسيطيتين $y = 4t, x = t^2 - 5$ بالصورة الديكارتية.

الحل

2

$y = 4\sqrt{x + 5}$

$x = \frac{y^2}{16} - 5$

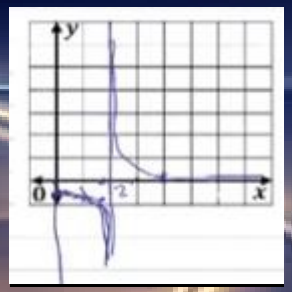
تحقق من فهمك

3 اكتب $x = \sqrt{t+4}$, $y = \frac{1}{t}$ بالصورة الديكارتية، ثم مثل المنحنى بيانيًّا، وحدد المجال.

الحل

3

$y \neq \frac{-1}{x^2-4}$



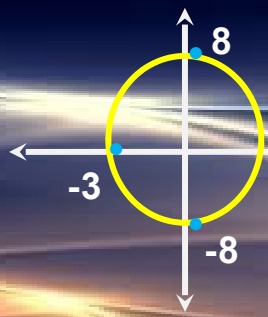
تحقق من فهمك

4 اكتب $x = 3\sin\theta, y = 8\cos\theta$ بالصورة الديكارتية، ثم مثّل المنحنى بيانيًا.

الحل

4

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{64} = 1$$



تحقق من فهمك

استعمل المتغير الوسيط في كل مما يأتي لكتابة معادلتين وسيطيتين تمثلان المعادلة الديكارتية $y = 6 - x^2$.
ثم مثل المنحنى بيانيًا موضحًا السرعة والاتجاه:

5A $t = x + 1$

5B $t = 3x$

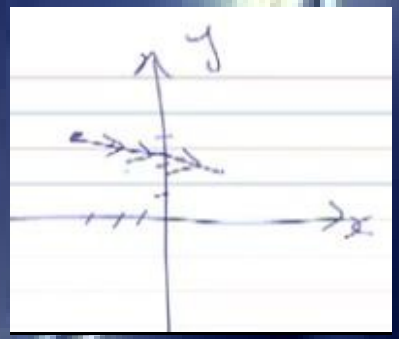
5C $t = 4 - 2x$

الحل

5A

$x = t - 1$

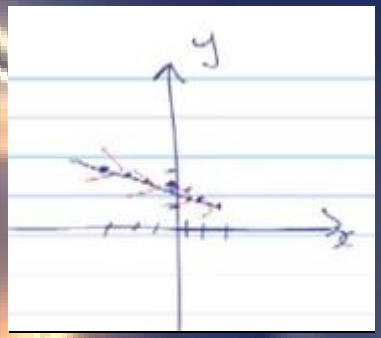
$y = \sqrt{-t + 7}$



5B

$x = \frac{t}{3}$

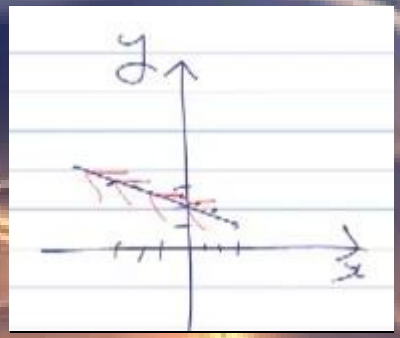
$y = \sqrt{6 - \frac{t}{3}}$



5C

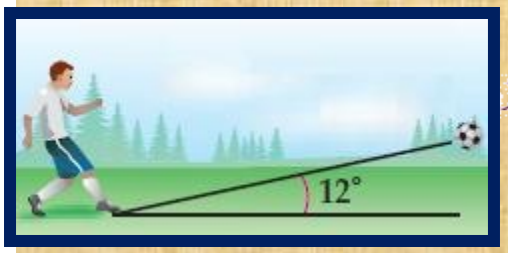
$x = 2 - \frac{t}{2}$

$y = \sqrt{4 + \frac{t}{2}}$



تحقق من فهمك

6 **كرة قدم:** ركل أحمد كرة بسرعة ابتدائية مقدارها 56 m/s وبزاوية مقدارها 12° مع الأفق. ما أقصى مسافة أفقية تقطعها الكرة؟



عودة لفهرس الفصل (4)

تدرب وحل المسائل

الفصل (1) تحليل الدوال

الفصل (2) العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

الفصل (3) المتطابقات والمعادلات المثلثية

الفصل (4) القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

الرئيسية

الفصل (1)
تحليل الدوال

1-1

1-2

1-3

1-4

1-5

1-6

1-7

عودة لفهرس تدرب

1-1 الدوال

تدرب وحل المسائل

الحل

اكتب كل مجموعة مما يأتي باستعمال الصفة المميزة للمجموعة،
وباستعمال رمز الفترة إن أمكن: (المثالان 1, 2)

1 $x > 50$

$(50,\infty)$ ،$\{x \mid x > 50, x \in R\}$

2 $x < -13$

$(-\infty, -13)$ ،$\{x \mid x < -13, x \in R\}$

3 $x \leq -4$

$(-\infty, -4]$ ،$\{x \mid x \leq -4, x \in R\}$

4 $\{-4, -3, -2, -1, \ldots\}$

$\{x \mid -4 \leq x, x \in Z\}$

عودة لفهرس الفصل (1)

للحل

5 $-31 < x \leq 64$

$(-31, 64]$ ، $\{x \mid -31 < x \leq 64, x \in R\}$

6 $x < -19$ أو $x > 21$

$(-\infty, -19) \cup (21, \infty)$ ، $\{x \mid x < -19$ أو $x > 21, x \in R\}$

7 $x \leq 61$ أو $x \geq 67$

$(-\infty, 61] \cup [67, \infty)$ ، $\{x \mid x \leq 61$ أو $x \geq 67, x \in R\}$

8 $x \leq -45$ أو $x > 86$

$(-\infty, -45) \cup [86, \infty)$ ، $\{x \mid x \leq -45$ أو $x > 86, x \in R\}$

9 المضاعفات الموجبة للعدد 5

$\{x \mid x = 5n, n \in N\}$

10 $x \geq 32$

$[32, \infty)$ ، $\{x \mid x \geq 32, x \in R\}$

الحل

في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت y تمثل دالةً في x أم لا: (مثال 3)

11 المتغير المستقل x يمثّل رقم الحساب في البنك، والمتغير y يمثّل الرصيد في الحساب.

دالة

12

x	0.01	0.04	0.04	0.07	0.08	0.09
y	423	449	451	466	478	482

ليست دالة

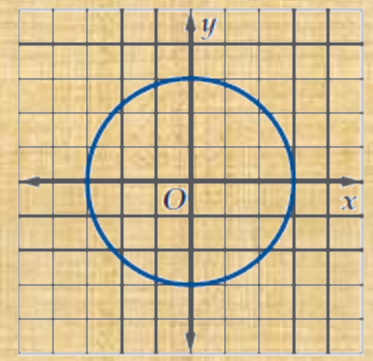
13 $\frac{1}{x} = y$ دالة

14 $x^2 = y + 2$ دالة

15 $\sqrt{48y} = x$ دالة

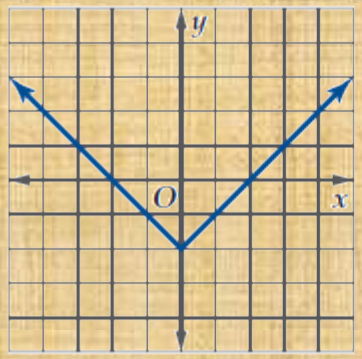
16 $\frac{x}{y} = y - 6$ ليست دالة

17



ليست دالة

18



دالة

للحل

أوجد قيم كل دالة من الدوال الآتية: (مثال 4)

19 $g(x) = 2x^2 + 18x - 14$

(a $g(9)$ 310

(b $g(3x)$ $18x^2 + 54x - 14$

(c $g(1 + 5m)$ $50m^2 + 110m + 6$

20 $h(y) = -3y^3 - 6y + 9$

(a $h(4)$ -207

(b $h(-2y)$ $24y^3 + 12y + 9$

(c $h(5b + 3)$ $-375b^3 - 675b^2 - 435b - 90$

21 $f(t) = \dfrac{4t + 11}{3t^2 + 5t + 1}$

(a $f(-6)$ $\dfrac{-13}{79}$

(b $f(4t)$ $\dfrac{16t+11}{48t^2+20t+1}$

(c $f(3 - 2a)$ $\dfrac{-8a+23}{12a^2-46a+43}$

22 $g(x) = \dfrac{3x^3}{x^2 + x - 4}$

(a $g(-2)$ 12

(b $g(5x)$ $\dfrac{375x^3}{25x^2+5x-4}$

(c $g(8 - 4b)$ $\dfrac{-192b^3+1152b^2-2304b+1536}{16b^2-68b+68}$

للحل

23 $g(m) = 3 + \sqrt{m^2 - 4}$

(a $g(-2)$ 3

(b $g(3m)$ $3 + \sqrt{9m^2 - 4}$

(c $g(4m - 2)$ $3 + 4\sqrt{m^2 - m}$

24 $t(x) = 5\sqrt{6x^2}$

(a $t(-4)$ $20\sqrt{6}$

(b $t(2x)$ $10 \mid x \mid \sqrt{6}$

(c $t(7 + n)$ $5|7 + n| \sqrt{6}$

الحل

25 **مبيعات:** إذا مُثّلت مبيعات شركة للسيارات خلال خمس سنوات بالدالة: $f(t) = 24t^2 - 93t + 78$، حيث t الزمن بالسنوات، وكانت المبيعات الفعلية موضحة في الجدول المجاور. (مثال 4)

السنة	المبيعات بملايين الريالات
1	1
2	3
3	14
4	74
5	219

a أوجد $f(1)$. 9 ملايين

b أوجد $f(5)$. 213 مليوناً

c هل تعتقد أن القاعدة $f(t)$ أكثر دقة في السنوات الأولى، أم في السنوات الأخيرة؟ برِّر إجابتك.

أعتقد أن القاعدة $f(t)$ أكثر دقة فى السنوات الأخيرة والتى حققت أعلى مبيعات.

للحل

حدّد مجال كل دالة مما يأتي: (مثال 5)

26 $f(x) = \dfrac{8x + 12}{x^2 + 5x + 4}$

$(-\infty, -4) \cup (-4, -1) \cup (-1, \infty)$

27 $g(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 3x - 40}$

$(-\infty, -5) \cup (-5, 8) \cup (8, \infty)$

28 $g(a) = \sqrt{1 + a^2}$

$(-\infty, \infty)$

29 $h(x) = \sqrt{6 - x^2}$

$[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$

30 $f(a) = \dfrac{5a}{\sqrt{4a - 1}}$

$(0.25, \infty)$

31 $f(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x + 1}$

$(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, \infty)$

32 **فيزياء:** ويعطى الزمن الدوري T لبندول ساعة بالصيغة $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{\ell}{9.8}}$، حيث ℓ طول البندول، فهل تمثّل T دالة في ℓ؟ إذا كانت كذلك فحدّد مجالها، وإذا لم تكن دالة فبيّن السبب. (مثال 5)

نعم ، لأن الطول لا يكون سالباً . ومجال الدالة هو : $[0, \infty)$

للحل

أوجد $f(-5)$ وَ $f(12)$ لكل من الدالتين الآتيتين: (مثال 6)

33

$$f(x)=\begin{cases}-4x+3 & , \quad x<3\\ -x^3 & , \quad 3\le x\le 8\\ 3x^2+1 & , \quad x>8\end{cases}$$

23 ; 433

34

$$f(x)=\begin{cases}-15 & , \quad x<-5\\ \sqrt{x+6} & , \quad -5\le x\le 10\\ \frac{2}{x}+8 & , \quad x>10\end{cases}$$

1 ; $8\frac{1}{6}$

35

عمل: تمثل الدالة $T(x)$ أدناه المبلغ (بالريال) الذي تتقاضاه شركة توزيع لأجهزة هاتف محمول:

$$T(x)=\begin{cases}2.1x & , \quad 0\le x\le 7000\\ 5000+2.4x & , \quad 7000<x\le 20000\\ 8000+3x & , \quad 20000<x\le 80000\end{cases}$$

حيث x تمثل عدد الأجهزة الموزَّعة، فأوجد:

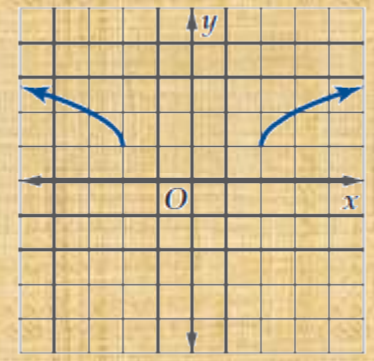
$T(7000)$, $T(10000)$, $T(50000)$.

14700 , 24500 , 150800

الحل

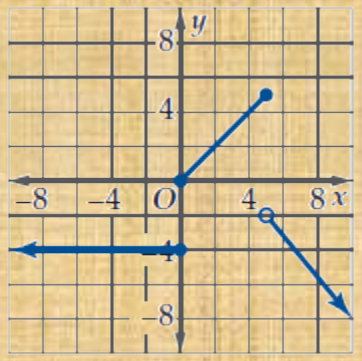
معتمدًا على اختبار الخط الرأسي، حدد إذا كان كل من التمثيلين الآتيين يمثل دالة أم لا. وبرّر إجابتك.

36



دالة، لا يقطع أي خط رأسي المنحنى أكثر من مرة.

37



ليست دالة، لأن الخط الرأسي (المحور y) يقطع التمثيل البياني في النقطتين $(0, 0)$ ، $(0, -4)$

38 **رياضة:** تتكون مسابقة رياضية من ثلاث مراحل: سباحة 0.4 mi، وقيادة دراجة هوائية 5 mi، وجري مسافة 2.6 mi. فإذا كان معدل سرعة عزام في كل مرحلة من المراحل الثلاث كما في الجدول أدناه:

المرحلة	معدل السرعة
السباحة	4 mi/ h
قيادة الدراجة	20 mi/ h
الجري	6 mi/ h

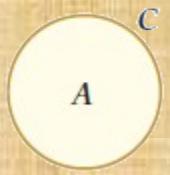
a) اكتب دالة متعددة التعريف تمثّل المسافة D التي قطعها عزام بدلالة الزمن t. مقرّبًا t إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم ذلك.

$$D(t) = \begin{cases} 4t & , \ 0 \le t \le 0.1 \\ 20t & , \ 0.1 < t \le 0.35 \\ 6t & , \ 0.35 < t \le 0.78 \end{cases}$$

b) حدِّد مجال الدالة. $[0, 0.78]$

للحل

39 **هندسة:** يمثّل الشكل أدناه دائرة مساحتها A ومحيطها C.



a) اكتب المساحة كدالة في المحيط. $A = \frac{C^2}{4\pi}$

b) أوجد $A(0.5), A(4)$. $A(0.5) = 0.02$ ، $A(4) = 1.27$

c) ما تأثير زيادة المحيط في المساحة؟ كلما زاد المحيط زادت المساحة.

40 **حسابات:** تتناقص قيمة بعض المعدات أو الآلات مع مرور الزمن. وتُستعمل الدوال الخطية لتمثيل هذا التناقص. فإذا كانت $v(t) = 1800 - 30t$ تمثّل قيمة حاسوب بالريال، بعد t شهر من شرائه، فحدّد مجال هذه الدالة.

$D = \{t \mid 0 \le t \le 60 , t \in N\}$

الحل

أوجد $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ، $f(a+h)$ ، $f(a)$ حيث $h \neq 0$ لكل مما يأتي:

41 $f(x) = -5$

-5 ، -5 ، 0

42 $f(x) = \sqrt{x}$

$\sqrt{a}$ ، $\sqrt{a+h}$ ، $\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$

43 $f(x) = \frac{1}{x+4}$

$\frac{1}{a+4}$ ، $\frac{1}{a+h+4}$ ، $\frac{-1}{a^2+ah+8a+4h+16}$

44 $f(x) = x^2 - 6x + 8$

$2a-6+h$ ، $a^2+2ah+h^2-6a-6h+8$ ، $2a+h-6$

45 $f(x) = -14x + 6$

$-14a+6$ ، $-14a-14h+6$ ، -14

46 $f(x) = x^3 + 9$

a^3+9 ، $a^3+3a^2h+3ah^2+h^3+9$ ، $3a^2+3ah+h^2$

47 $f(x) = 5x^2$

$5a^2$ ، $5a^2+10ah+5h^2$ ، $10a+5h$

48 $f(x) = x^3$

a^3 ، $a^3+3a^2h+3ah^2+h^3$ ، $3a^2+3ah+h^2$

للحل

49 **صناعة:** في أحد المعامل الوطنية يتم صنع أغلفة بريدية متفاوتة الأبعاد، بحيث تكون نسبة طول الغلاف إلى عرضه من 1.3 إلى 2.5. فإذا كانت أصغر قيمة لطول الأغلفة المنتجة 5 in، وأكبر قيمة $11\frac{1}{2}$ in، فأجب عما يأتي:

a) اكتب مساحة الغلاف A كدالة في طوله ℓ، إذا كانت نسبة طول الظرف إلى عرضه 1.8، ثم اكتب مجال الدالة.

$A(\ell) = \frac{\ell^2}{1.8}$;[5,11.5]

b) اكتب مساحة الغلاف A كدالة في عرضه h، إذا كانت نسبة طول الغلاف إلى عرضه 2.1، ثم اكتب مجال الدالة.

$A(h) = 2.1h^2$,[2.4,5.5]

c) أوجد مساحة الغلاف عند أكبر طول ممكن له، وأكبر نسبة بين طوله وعرضه.

$52.9\ in^2$

في كل من العلاقتين الآتيتين، حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x أم لا. برر إجابتك.

50 $x = |y|$

لا؛ لأن كل قيمة من قيم المدى ترتبط بقيمتين من المجال، ولحل المعادلة بالنسبة إلى y يكون هناك قيمتان موجبة وسالبة والقيمة المطلقة لا تعطي قيمة y.

51 $x = y^3$

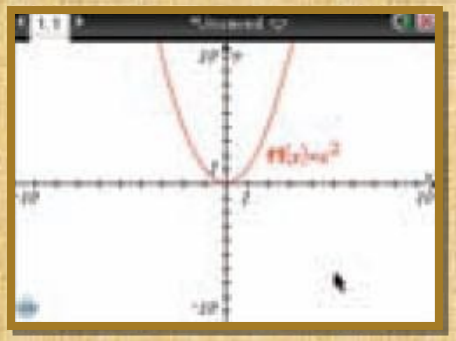
نعم؛ لأن كل قيمة في المدى ترتبط بقيمة واحدة من المجال لذا تمثل دالة.

للحل

52

تمثيلات متعددة: سوف تستقصي في هذه المسألة مدى دالة $f(x) = x^n$، حيث $n \in \mathbb{N}$.

a) **بيانيًّا:** استعمل الحاسبة البيانيّة لتمثل الدالة $f(x) = x^n$ بيانيًّا لقيم n الصحيحة من 1 إلى 6.



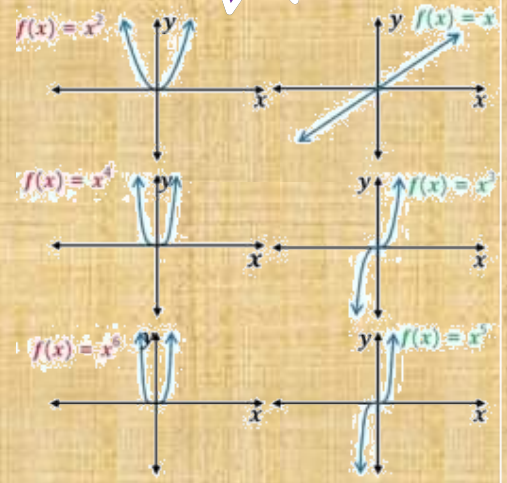
b) **جدوليًّا:** تنبأ بمدى كل دالة من الدوال التي مثّلتها في الفرع a، واعرضه في جدول يتضمن قيم n، والمدى المرتبط بكل منها.

c) **لفظيًّا:** خمّن مدى الدالة $f(x)$ عندما يكون n زوجيًّا.

يكون المدى $[0, \infty)$ إذا كانت n زوجية

d) **لفظيًّا:** خمّن مدى الدالة $f(x)$ عندما يكون n فرديًّا.

يكون المدى $(-\infty, \infty)$ إذا كانت n فردية



n	المدى
1	$(-\infty, \infty)$
2	$[0, \infty)$
3	$(-\infty, \infty)$
4	$[0, \infty)$
5	$(-\infty, \infty)$
6	$[0, \infty)$

تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

1-2

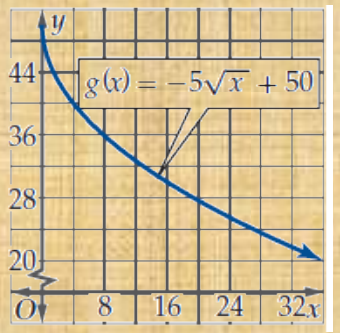
تدرب وحل المسائل

للحل

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي؛ لتقدير قيمها المطلوبة، ثم تحقق من إجابتك جبريًا. وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك:

(مثال 1)

1

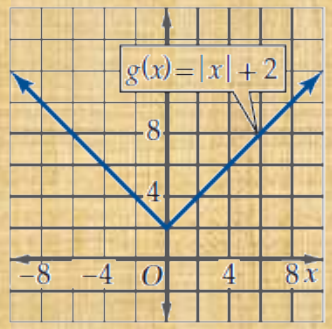


(a $g(6)$ 37.75

(b $g(12)$ 32.68

(c $g(19)$ 28.21

2



(a $g(-8)$ 10

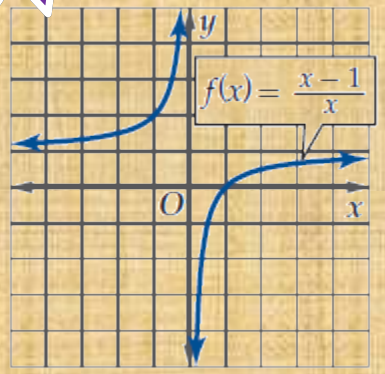
(b $g(-3)$ 5

(c $g(0)$ 2

عودة لفهرس الفصل (1)

للحل

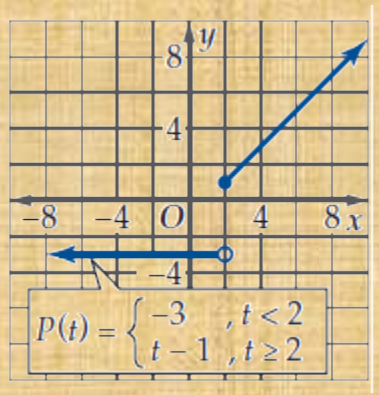
4



$f(0)$ (c $f(0.5)$ (b $f(-3)$ (a

0 -1 $\frac{4}{3}$

3



$P(9)$ (c $P(2)$ (b $P(-6)$ (a

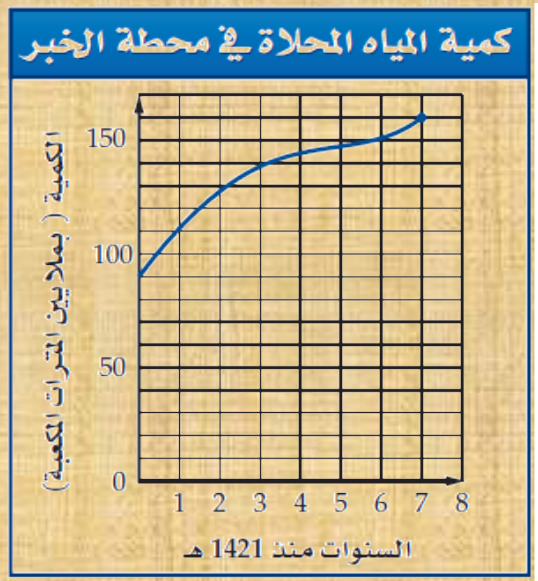
8 1 -3

للحل

5 **مياه:** إذا كانت كمية المياه المحلاة في محطة الخبر (بملايين المترات المكعبة) في الفترة (1421هـ إلى 1428هـ) معطاة بالدالة

$$f(x) = 0.0509x^4 - 0.3395x^3 - 2.28x^2 + 25.35x + 88.27$$

حيث x رقم السنة منذ 1421 هـ. (مثال 1)



a) قدّر كمية المياه المحلاة في سنة 1425 هـ باستعمال التمثيل البياني. 145 مليون متر مكعب.

b) أوجد كمية المياه المحلاة في سنة 1425 هـ جبريًّا مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة. 147.4 مليون متر مكعب.

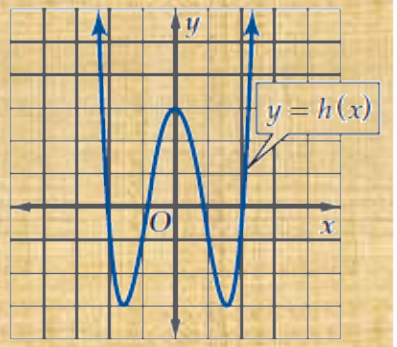
c) قدّر السنة التي كانت كمية المياه المحلاة فيها 130 مليون متر مكعب باستعمال التمثيل البياني، وتحقق من إجابتك جبريًّا.

1422هـ.

الحل

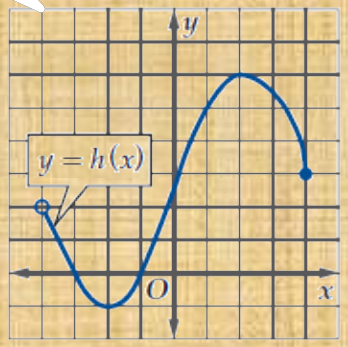
استعمل التمثيل البياني للدالة h في كلٍّ مما يأتي لإيجاد كل من مجال الدالة ومداها. (مثال 2)

6



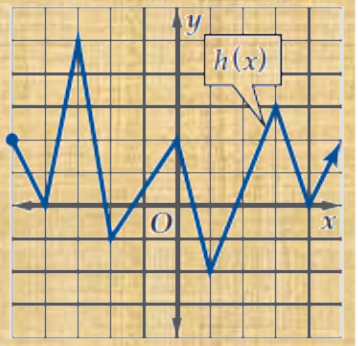
المجال: $\{x \mid x \in R\}$،
المدى: $[-3, \infty)$

7



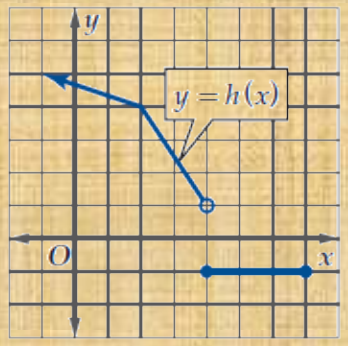
المجال: $(-4, 4]$،
المدى: $[-1, 6]$

8



المجال: $(-5, \infty)$،
المدى: $[-2, \infty)$

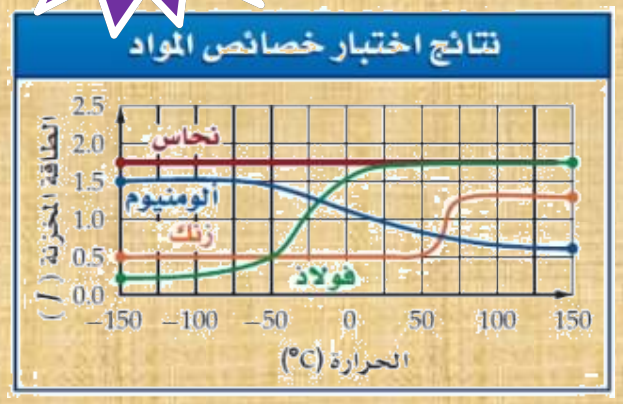
9



المجال: $(-\infty, 7]$،
المدى: $[-1] \cup (1, \infty)$

للحل

10 **هندسة:** أجريت اختبارات على الخصائص الفيزيائية لعينات من أربع قطع معدنية، حيث أخضعت لدرجات حرارة سيليزية مختلفة. فإذا كانت الطاقة المخزنة أو الممتصة في العينة خلال الاختبار مقاسة بالجول (J) كما هو موضح في الشكل، فأجب عما يأتي: (مثال 2)



a) أوجد المجال والمدى لكل دالة.

المعدن	المدى	المجال
النحاس	$\{y \mid y = 1.75\}$	$\{x \mid -150 \le x \le 150, x \in R\}$
الألمونيوم	$\{y \mid 0.6 \le y \le 1.5, y \in R\}$	
الزنك	$y \mid 0.5 \le y \le 1.25, y \in R\}$	
الفولاذ	$\{y \mid 0.2 \le y \le 1.75, y \in R\}$	

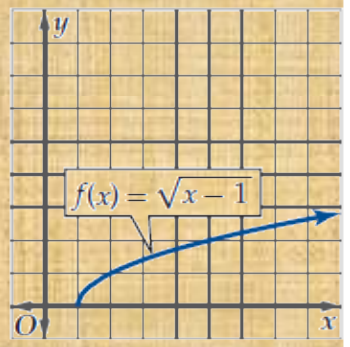
b) استعمل التمثيل البياني لتقدير الطاقة المخزنة في كل معدن عند الصفر السيليزي.

المعدن	الطاقة المخزنة
النحاس	1.75 جول
الألمونيوم	1.2 جول
الزنك	0.5 جول
الفولاذ	1.5 جول

للحل

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي؛ لإيجاد مقطع المحور y، وأصفار الدالة، ثم أوجد هذه القيم جبريًّا. (المثالان 3, 4)

11

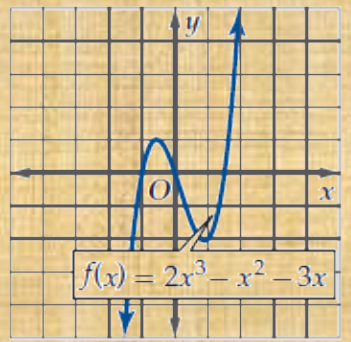


مقطع y لا يوجد ، مقطع $x = 1$

جبريًّا:

$\sqrt{x-1} = 0 \longrightarrow x = 1$

12



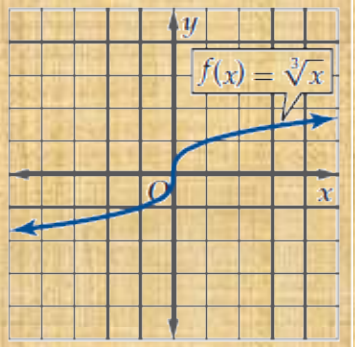
مقطع y $= 0$

مقطع x $= -1 , 0 , 1.5$

جبريًّا: $x(2x-3)(x+1) = 0$

$x = 0 , 1.5 , -1$

13



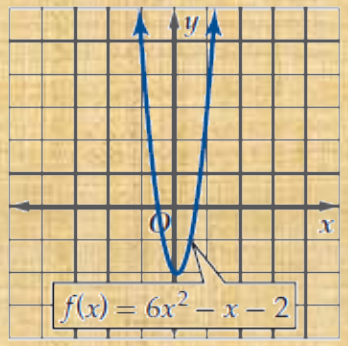
مقطع $x = 0$ ، مقطع $y = 0$

جبريًّا:

$\sqrt[3]{x} = 0 \longrightarrow x = 0$

$x = 0 \longrightarrow y = 0$

14



مقطع y $= -2$

مقطع x $= -0.5 , 0.6$

جبريًّا: $(2x+1)(3x-2) = 0$

$x = -0.5 , x = 0.66$

$x = 0 \longrightarrow y = -2$

للحل

15

مقطع x = -2

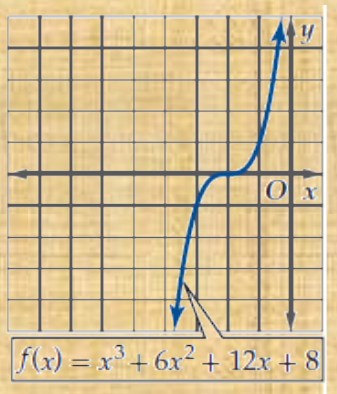
مقطع y = 8

جبرياً: $(x+2)(x+4x+4)=0$

$(x+2)(x+2)(x+2)=0$

x = -2

x =0 ⟶ y = 8



16

مقطع x = -2 , -3

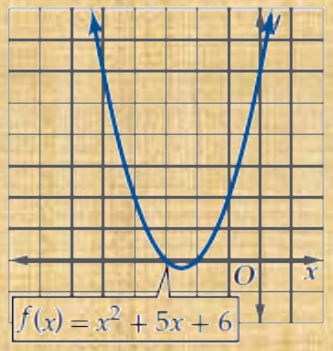
مقطع y = 6

جبرياً: $x^2+5x+6=0$

$(x+2)(x+3)=0$

x = -2 , -3

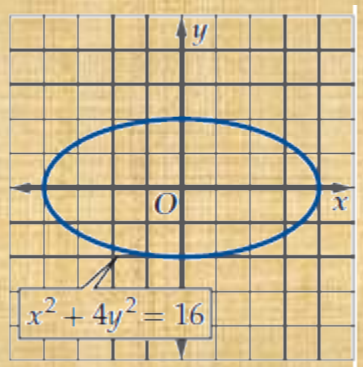
x =0 ⟶ y = 6



الحل

استعمل التمثيل البياني لكل معادلة مما يأتي لاختبار التماثل حول المحور x، والمحور y، ونقطة الأصل. عزِّز إجابتك عدديًّا، ثم تحقق منها جبريًّا: (مثال 5)

17



يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x، والمحور y، ونقطة الأصل.

x	y	(x, y)
2	$\sqrt{3}$	$(2, \sqrt{3})$
2	$-\sqrt{3}$	$(2, -\sqrt{3})$

بما أن $x^2 + 4(-y)^2 = 16$، تكافئ $x^2 + 4y^2 = 16$، فإن منحنى الدالة متماثل حول المحور x.

x	y	(x, y)
2	$\sqrt{3}$	$(2, \sqrt{3})$
-2	$\sqrt{3}$	$(-2, \sqrt{3})$

بما أن $(-x)^2 + 4y^2 = 16$ تكافئ $x^2 + 4y^2 = 16$، فإن المنحنى متماثل حول المحور y.

x	y	(x, y)
2	$\sqrt{3}$	$(2, \sqrt{3})$
-2	$-\sqrt{3}$	$(-2, -\sqrt{3})$

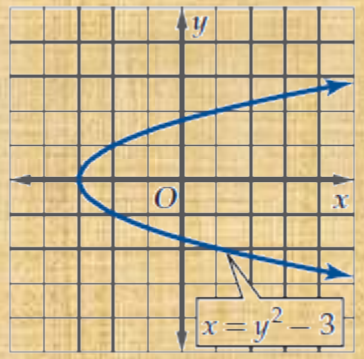
بما أن $(-x)^2 + 4(-y)^2 = 16$ تكافئ $x^2 + 4y^2 = 16$، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

الحل

18

يتضح من التمثيل البيانى أن المنحنى متماثل حول المحور x بما أن $x = (-y)^2 - 3$ تكافئ $x = y^2 - 3$، فإن المنحنى متماثل حول المحور x.

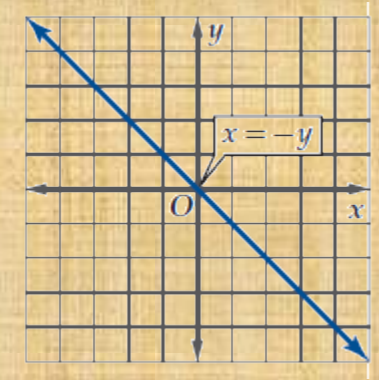
x	y	(x, y)
1	2	$(1, 2)$
1	-2	$(1, -2)$



19

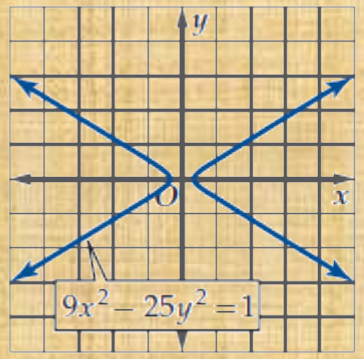
يتضح من التمثيل البيانى أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل. بما أن $(-y) - = x - = x$ تكافئ $x = -y$، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

x	y	(x, y)
-2	2	$(-2, 2)$
2	-2	$(2, -2)$



للحل

20



يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x، ومحور y، ونقطة الأصل.

x	y	(x, y)
1	$\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\left(1, \frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$
1	$-\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\left(1, -\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$

بما أن $9x^2 - 25(-y)^2$ تكافئ $9x^2 - 25y^2 = 1$ ، فإن المنحنى متماثل حول محور x.

x	y	(x, y)
1	$\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\left(1, \frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$
−1	$\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\left(-1, \frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$

بما أن $9(-x)^2 - 25y^2 = 1$ تكافئ $9x^2 - 25y^2 = 1$، فإن المنحنى متماثل حول المحور y.

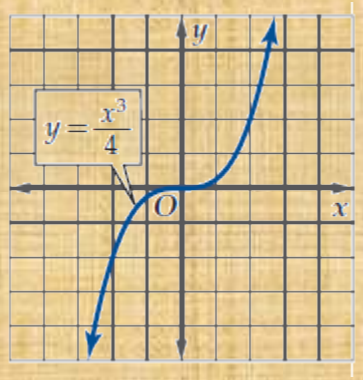
x	y	(x, y)
1	$\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\left(1, \frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$
−1	$-\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\left(-1, -\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$

بما أن $9(-x)^2 - 25(-y)^2 = 1$ تكافئ $9x^2 - 25y^2 = 1$، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

الحل

21

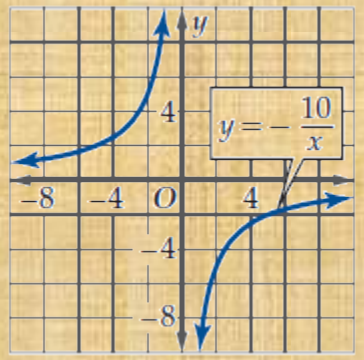
يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل. بما أن $-y = \frac{(-x)^3}{4}$ تكافئ $y = \frac{x^3}{4}$، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.



x	y	(x, y)
1	$\frac{1}{4}$	$(1, \frac{1}{4})$
−1	$\frac{1}{4}$	$(-1, -\frac{1}{4})$

22

يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل. بما أن $-y = -\frac{10}{(-x)}$ تكافئ $y = -\frac{10}{x}$، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.



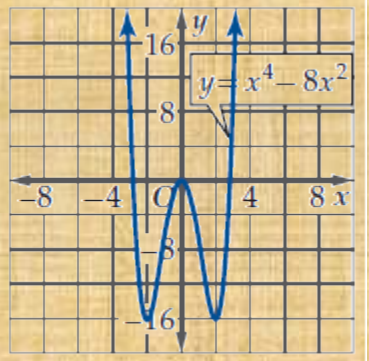
x	y	(x, y)
1	−10	(1, −10)
−1	10	(−1, 10)

للحل

23

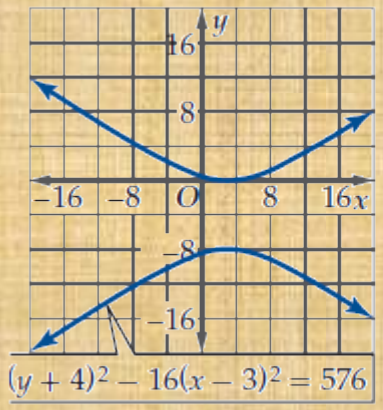
يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور y. بما أن $y = (-x)^4 - 8(-x)^2$ تكافئ $y = x^4 - 8x^2$، فإن المنحنى متماثل حول المحور y.

x	y	(x, y)
1	−7	(1 , −7)
−1	−7	(−1 , −7)



24

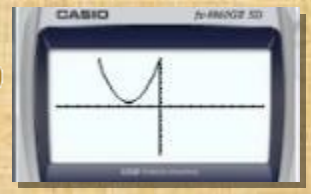
لا يوجد تماثل.



للحل

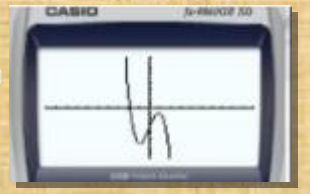
الحاسبة البيانية : استعمل الحاسبة البيانية لتمثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، ثم حلّل منحناها لتحدّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقق من إجابتك جبريًا. و إذا كانت الدالة زوجيّة أو فردية فصف تماثل منحناها. (مثال 6)

25 $f(x) = x^2 + 6x + 10$



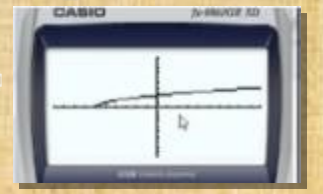
$f(x) \neq f(-x)$
$f(-x) \neq -f(x)$
الدالة ليست زوجية
وليست فردية

26 $f(x) = -2x^3 + 5x - 4$



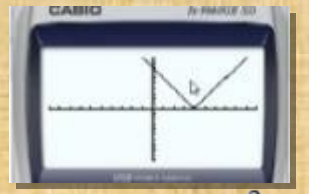
$f(x) \neq f(-x)$
$f(-x) \neq -f(x)$
الدالة ليست زوجية
وليست فردية

27 $g(x) = \sqrt{x+6}$



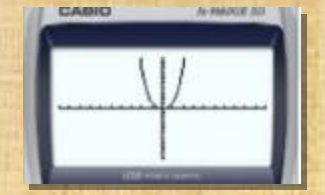
$g(x) \neq g(-x)$
$g(-x) \neq -g(x)$
الدالة ليست زوجية
وليست فردية

28 $h(x) = |8 - 2x|$



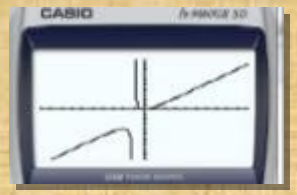
$h(x) \neq h(-x)$
$h(-x) \neq -h(x)$
∴ الدالة ليست زوجية
وليست فردية

29 $f(x) = |x^3|$



$f(x) = f(-x) = x^3$
∴ الدالة زوجية

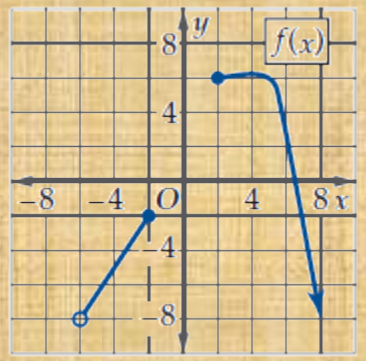
30 $g(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$



$g(x) \neq g(-x)$
$g(-x) \neq -g(x)$
الدالة ليست زوجية
وليست فردية

للحل

31 استعمل التمثيل البياني للدالة f لتقدير قيمها المطلوبة:



(a $f(-2)$ -2

(b $f(-4)$ -5

(c $f(2)$ 6

للحل

32 **مبيعات:** إذا كان عدد أجهزة التبريد التي باعها محل للأجهزة الكهربائية مقدرًا بالآلاف خلال المدة 1422هـ إلى 1426هـ يُعطى بالدالة $h(x) = 0.5x^2 + 0.5x + 1.2$، حيث x رقم السنة منذ 1422 هـ.

a) اكتب المجال المناسب للدالة، ثم قرّب مداها.

المجال: $\{x \mid 0 \le x \le 4, x \in W\}$
المدى: $\{y \mid 1200 \le y \le 11200, y \in R\}$

b) استعمل المنحنى لتقدير عدد الأجهزة المبيعة سنة 1424هـ. ثم أوجد ذلك جبريًّا.

4300 جهاز. وجبريًّا: 4200 جهاز.

c) استعمل المنحنى لتقدير قيمة المقطع y للدالة ثم أوجده جبريًّا. ماذا يمثّل المقطع y؟

1100، وجبريًّا: 1200. ويمثل المقطع y عدد الأجهزة المبيعة سنة 1422هـ.

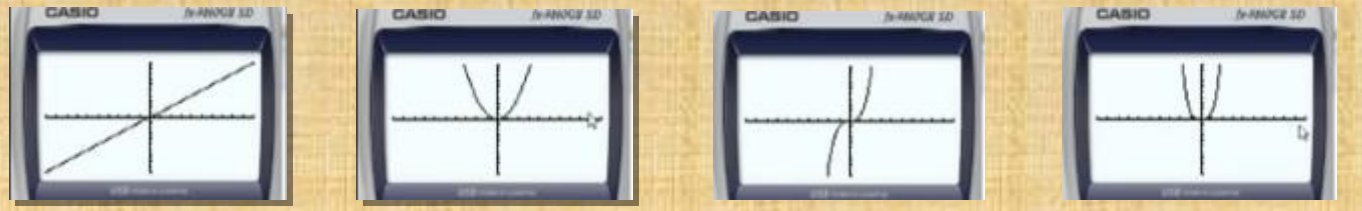
d) هل لهذه الدالة أصفار؟ إذا كانت الإجابة نعم، فأوجد قيمة تقريبية لهذه الأصفار، وفسر معناها. وإذا كانت الإجابة لا، فوضّح السبب.

لا يوجد لهذه الدالة أصفار، لأنه لكل سنة من سنوات المجال يوجد عدد من الأجهزة المبيعة.

للحل

33 **دوال:** إذا كانت $f(x) = x^n$، حيث $n \in \mathbb{N}$ فأجب عن الأسئلة الآتية:

a) استعمل الحاسبة البيانيّة لتمثل $f(x)$ بيانيًّا لكل قيمة من قيم n في الفترة $1 \le n \le 6$.



$x = 4$ $x = 3$ $x = 2$ $x = 1$

b) اكتب المجال والمدى لكل دالة.

المجال R المدى $[0, \infty)$	المجال R المدى R	المجال R المدى $[0, \infty)$	المجال R المدى R

c) صف التماثل لكل دالة.

يتضح من التمثيل البياني أن الدالة زوجية أي أنها متماثلة حول محور y	يتضح من التمثيل البياني أن الدالة فردية أي أنها متماثلة حول نقطة الأصل	يتضح من التمثيل البياني أن الدالة زوجية أي أنها متماثلة حول محور y	يتضح من التمثيل البياني أن الدالة فردية أي أنها متماثلة حول نقطة الأصل

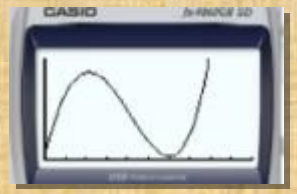
d) تنبَّأ بمجال الدالة $f(x) = x^{35}$، ومداها، وتماثلها، ثم برّر إجابتك.

N=35 (فردية) أي أن الدالة فردية مجالها R ومداها R ، ومتماثلة حول نقطة الأصل

للحل

34 **صيدلة:** إذا كان عدد ملجرامات الدواء في دم مريض بعد x ساعة من تناوله الدواء يعطى بالدالة : $f(x) = 0.5x^4 + 3.45x^3 - 96.65x^2 + 347.7x$

a) استعمل الحاسبة البيانيّة لتمثل الدالة بيانيًّا .



b) اكتب المجال المناسب للدالة، وبرّر إجابتك.

المجال المناسب [0,6] حيث تتناقص الدالة (مفعول الدواء) وصولا إلى القيمة 6

c) ما أكبر عدد من ملجرامات الدواء يكون موجودًا في دم المريض وفق هذه الدالة؟

أكبر عدد من الملجرامات يكون عند القمة (max) يساوي 346 ملجرام تقريباً

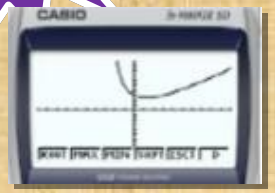
الحل

الحاسبة البيانية: مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا، وحدّد أصفارها، ثم تحقّق من أصفار الدالة جبريًّا:

35 $f(x) = \dfrac{4x - 1}{x}$

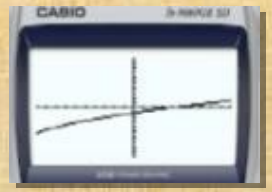
أصفار الدالة : 0.25

36 $f(x) = \dfrac{x^2 + 9}{x + 3}$



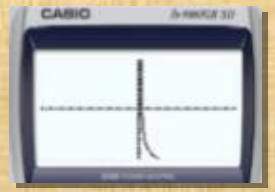
لا يوجد أصفار

37 $h(x) = 2\sqrt{x + 12} - 8$



أصفار الدالة : 4

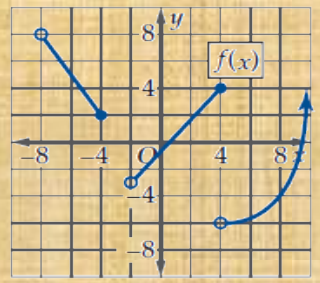
38 $g(x) = -12 + \dfrac{4}{x}$



أصفار الدالة : $\frac{1}{3}$

استعمل التمثيل البياني للدالة f لتحدد مجالها ومداها في كل مما يأتي:

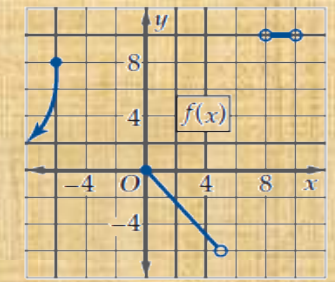
39



المجال: $(-8, -4] \cup (-2, \infty)$

المدى: $(-6, \infty)$

40



المجال: $(-\infty, -6] \cup [0, 5) \cup (8, 10)$

المدى: $(-\infty, 8] \cup [10]$

للحل

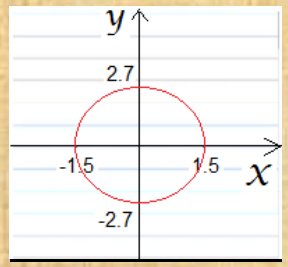
41 **فيزياء:** إذا كان مسار أحد المذنبات حول الشمس يُعطى بالعلاقة:

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{10} = 1$$

a) صف تماثل منحنى مسار المذنب.

المنحنى متماثل حول نقطة الأصل وحول محور x وحول محور y

b) استعمل التماثل لتمثيل منحنى العلاقة.



c) إذا مر المذنب بالنقطة $(2, \sqrt{5})$، فعيّن ثلاث نقاط أخرى يجب أن يمر بها المذنب.

$(-2, \sqrt{5})$ ، $(2, -\sqrt{5})$ ، $(-2, -\sqrt{5})$

للحل

42 **أسهم:** افرض أن النسبة المئوية للتغير في سعر سهم خلال سنة واحدة تعطى بالدالة:

$$p(x) = 0.0005x^4 - 0.0193x^3 + 0.243x^2 - 1.014x + 1.04$$

حيث x رقم الشهر بدءًا من شهر يناير.

a) استعمل الحاسبة البيانية لتمثل الدالة بيانيًّا.

b) عيّن المجال المناسب للدالة، ثم قدّر مداها.

c) استعمل المنحنى لتقريب قيمة المقطع y، وماذا يمثّل؟

d) أوجد أصفار الدالة، ووضّح معناها.

للحل

43

تمثيلات متعددة: سوف تستقصي في هذه المسألة مدى قيم الدالة $f(x) = \frac{1}{x-2}$ عندما تقترب x من العدد 2.

a) **جدوليًا:** انقل الجدول الآتي إلى دفترك. وأضف قيمًا أخرى للمتغير x إلى يمين العدد 2 وإلى يساره. ثم أكمل الجدول.

x	1.99	1.999	2	2.001	2.01
$f(x)$					

b) **تحليليًا:** معتمدًا على جدولك، ما القيمة أو القيم التي تقترب منها الدالة عندما تقترب x من العدد 2؟

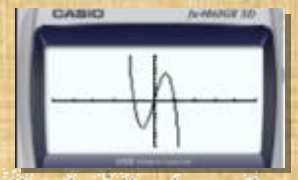
c) **بيانيًا:** مثّل الدالة بيانيًا. وهل يؤكد التمثيل البياني تخمينك في الفرع **b** ؟ وضح إجابتك.

d) **لفظيًا:** خمّن القيمة التي تقترب منها الدالة من خلال التمثيل البياني في الفرع **c** ووضح أي تناقض يظهر في التمثيل .

الحل

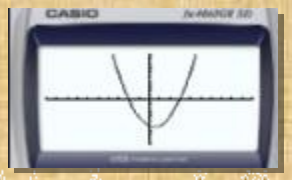
الحاسبة البيانية : مثّل كلاً من الدوال الآتية بيانيًا. و حدّد إذا كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك.

44 $h(x) = x^5 - 17x^3 + 16x$



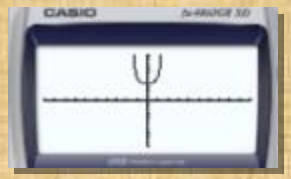
تماثل حول نقطة الأصل، الدالة فردية.

45 $f(x) = x^2 - x - 6$



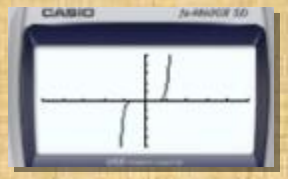
لا يوجد تماثل؛ ليست فردية ولا زوجية.

46 $h(x) = x^6 + 4$



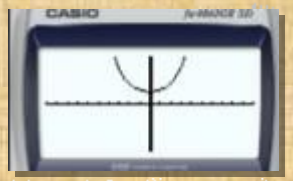
تماثل حول محور الصادات؛ الدالة زوجية.

47 $f(g) = g^9$



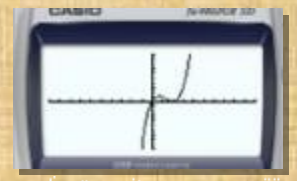
تماثل حول نقطة الأصل؛ الدالة فردية.

48 $g(x) = x^4 + 8x^2 + 81$



تماثل حول محور الصادات، الدالة زوجية.

49 $f(z) = z^3 - 4z^2 + 4z$



لا يوجد تماثل، ليست فردية وليست زوجية.

الاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني والنهايات

1-3

تدرب وحل المسائل

الحل

حدد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة عند قيمة x المعطاة. وبرر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي، قفزي قابل للإزالة. (المثالان 1, 2)

1 $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$، عند $x = -5$.

❶ $f(-5) = \sqrt{(-5)^2 - 4} = 4.58$ الدالة معرفة.

❷ $\lim_{x \to -5^-} f(x) = \lim_{x \to -5^+} f(x) = 4.58$ النهاية موجودة.

❸ $\lim_{x \to -5} f(x) = f(-5)$

لذا: الدالة متصلة عند $x = -5$.

2 $f(x) = \sqrt{x + 5}$، عند $x = 8$.

❶ $f(8) = \sqrt{8 + 5} = 3.61$ الدالة معرفة.

❷ $\lim_{x \to 8^-} f(x) = \lim_{x \to 8^+} f(x) = 3.61$ النهاية موجودة.

❸ $\lim_{x \to 8} f(x) = f(8)$

لذا: الدالة متصلة عند $x = 8$.

عودة لفهرس الفصل (1)

للحل

3 $h(x) = \frac{x^2 - 36}{x + 6}$ ، عند $x = -6$ و $x = 6$.

عند $x = -6$

❶ $h(-6)$ غير موجودة.

لذا: للدالة عدم اتصال تقطي قابل للإزالة، لأن النهاية موجودة.

عند $x = 6$

❶ $h(6)$ الدالة معرفة.

❷ النهاية موجودة.

❸ $\lim_{x \to 6} h(x) = h(6)$

لذا: الدالة متصلة عند $x = 6$.

4 $g(x) = \frac{x}{x - 1}$ ، عند $x = 1$.

❶ $g(1)$ غير موجودة.

❷ النهاية غير موجودة.

لذا: للدالة عدم اتصال لا نهائي غير قابل للإزالة.

الحل

5 $h(x) = \dfrac{x-4}{x^2-5x+4}$ ، عند $x = 1$ و $x = 4$.

عند $x = 4$

1. $h(4)$ غير موجودة.
2. النهاية موجودة.

لذا: للدالة عدم اتصال نقطي قابل للإزالة.

عند $x = 1$

1. $h(1)$ غير موجودة.
2. النهاية غير موجودة.

لذا: للدالة عدم اتصال لا نهائي.

6 $h(x) = \dfrac{x(x-6)}{x^3}$ ، عند $x = 0$ و $x = 6$.

عند $x = 6$

1. $h(6)$ الدالة معرفة.
2. النهاية موجودة.
3. $\lim\limits_{x \to 6} f(x) = f(6)$

لذا: الدالة متصلة عند $x = 6$.

عند $x = 0$

1. $h(0)$ غير موجودة.
2. النهاية غير موجودة.

لذا: للدالة عدم اتصال لا نهائي.

7 $f(x) = \begin{cases} 4x-1 & , \ x \le -6 \\ -x+2 & , \ x > -6 \end{cases}$ ، عند $x = -6$.

1. $f(-6)$ الدالة معرفة.
2. النهاية غير موجودة. لذا: للدالة عدم اتصال قفزي.

8

فيزياء: غرفتان درجتا حرارتهما مختلفتان يفصل بينهما حائط. تنتقل الحرارة بين الغرفتين عبر الحائط حسب العلاقة $f(w) = \frac{7.4}{w}$، حيث $f(w)$ كمية الحرارة بالواط و w سمك الحائط بالمتر. (المثالان 1، 2)

a) حدد ما إذا كانت الدالة متصلة عند $w = 0.4$. وبرِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

❶ الدالة معرفة.

❷ النهاية موجودة.

❸ $\lim_{w \to 0.4} f(w) = f(0.4)$

لذا: الدالة متصلة عند $w = 0.4$.

b) حدّد نقاط عدم الاتصال للدالة (إن وجدت)، ومانوعها؟

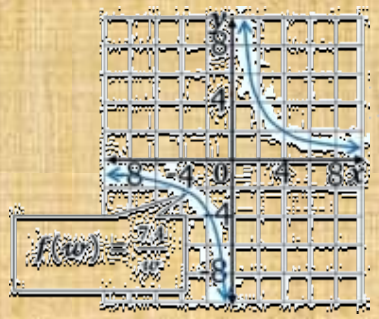
عند $w = 0$.

❶ $f(0)$ غير موجودة.

❷ النهاية غير موجودة.

لذا: للدالة عدم اتصال لا نهائي.

c) مثّل الدالة بيانيًّا للتحقق مما توصلت إليه في الفرع b.



للحل

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكل دالة مما يأتي في الفترة المعطاة. (مثال 3, 4)

9 $f(x) = x^3 - x^2 - 3, [-2, 4]$

$[1, 2]$

10 $g(x) = -x^3 + 6x + 2, [-4, 4]$

$[-3, -2]$ ، $[-1, 0]$ ، $[2, 3]$

11 $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 3, [-3, 3]$

$[-1, 0]$ ، $[1, 2]$

12 $h(x) = \frac{x^2 + 4}{x - 5}, [-2, 4]$

لا يوجد أصفار للدالة في الفترة المعطاة

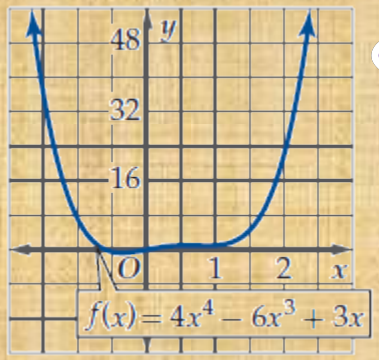
13 $g(x) = \sqrt{x^3 + 1} - 5, [0, 5]$

$[2, 3]$

للحل

استعمل التمثيل البياني لكل من الدوال الآتية لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثم عزز إجابتك عدديًا. (المثالان 4، 5)

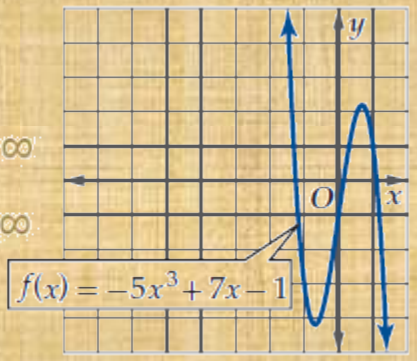
14



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

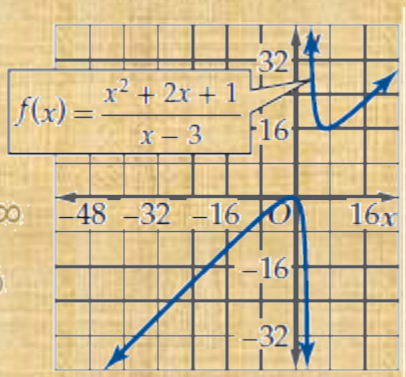
15



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

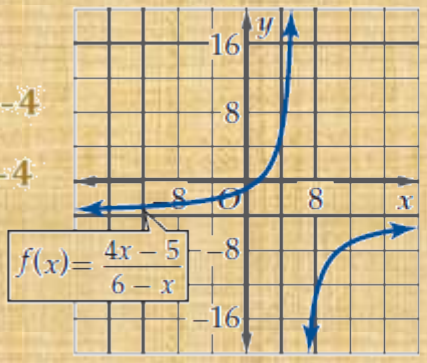
16



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

17

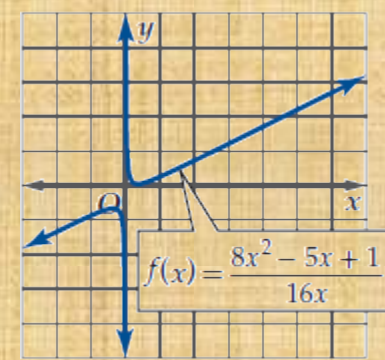


$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -4$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = -4$

الحل

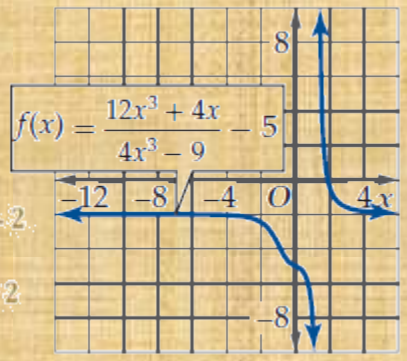
18



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ،

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

19

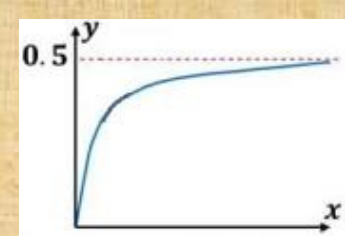


$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$ ،

$\lim_{x \to \infty} f(x) = -2$

20

كيمياء: حد ما إذا كانت الدالة متصلة يعطى معدل التفاعل R في تجربة كيميائية بالدالة $R(x) = \frac{0.5x}{x + 12}$، حيث x تركيز المحلول بالملجرام لكل لتر. (مثال 6)



a) مثّل الدالة بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانيّة.

b) صف سلوك طرفي التمثيل البياني، وماذا يعني في التجربة؟ عزز إجابتك عدديًّا.

يبين سلوك طرفي التمثيل البياني أنه إذا زاد تركيز المحلول يقترب معدل التفاعل الكيميائي من 0.5

تلاحل

استعمل التبرير المنطقي لتحديد سلوك طرف التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي ، عندما تقترب x من برر إجابتك. (مثال 7)

21 $q(x) = -\frac{24}{x}$

عندما $x \to \infty$ فإن قيمة الكسر تقل. لذا فإن $q(x)$ تقترب من 0

22 $f(x) = \frac{0.8}{x^2}$

عندما $x \to \infty$ فإن قيمة الكسر تقل. لذا فإن $q(x)$ تقترب من 0

23 $m(x) = \frac{4+x}{2x+6}$

عندما $x \to \infty$ فإن الكسر يقترب من $\frac{1}{2}$. لذا فإن $m(x)$ تقترب من $\frac{1}{2}$.

24 $c(x) = \frac{5x^2}{x^3+2x+1}$

عندما $x \to \infty$ فإن قيمة الكسر تقل. لذا فإن $q(x)$ تقترب من 0

25 $k(x) = \frac{4x^2-3x-1}{11x}$

عندما $x \to \infty$ فإن قيمة الكسر تزايد. لذا فإن $k(x)$ تؤول الى ∞

26 $g(x) = x^4 - 9x^2 + \frac{x}{4}$

عندما $x \to \infty$ فإن قيمة الكسر تزايد، لذا فإن $g(x)$ تؤول إلى ∞

27 $p(x) = \frac{x+1}{x-2}$

عندما $x \to \infty$ فإن الكسر يقترب من 1 . لذا فإن $p(x)$ تقترب من 1

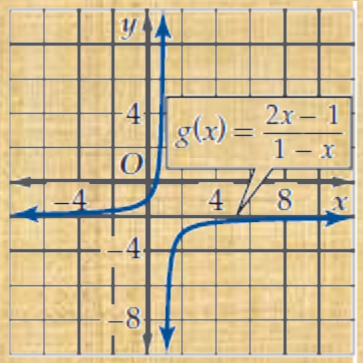
للحل

28 **فيزياء:** تُعطى طاقة الحركة لجسم متحرك بالدالة $E(m) = \frac{p^2}{2m}$، حيث p الزخم، m كتلة الجسم. إذا وضع رمل في شاحنة متحركة، فماذا سيحدث إذا استمرت m في الازدياد؟ (مثال 7)

عندما تتزايد كتلة الجسم، فإن طاقة السيارة الحركية تقترب من 0

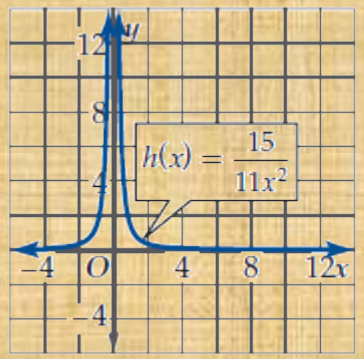
استعمل كلًّا من التمثيلين البيانيين الآتيين لتحديد قيمة أو قيم x التي تكون الدالة غير متصلة عندها، وحدد نوع عدم الاتصال، ثم استعمل المنحنى لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني. برر إجابتك.

29



- قيمة x التي تكون الدالة غير متصلة عندها هي $x = 1$.
- نوع عدم الاتصال: لا نهائي (غير معرفة والنهاية غير موجودة عند $x=1$)
- سلوك طرفي التمثيل البياني $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = -2$

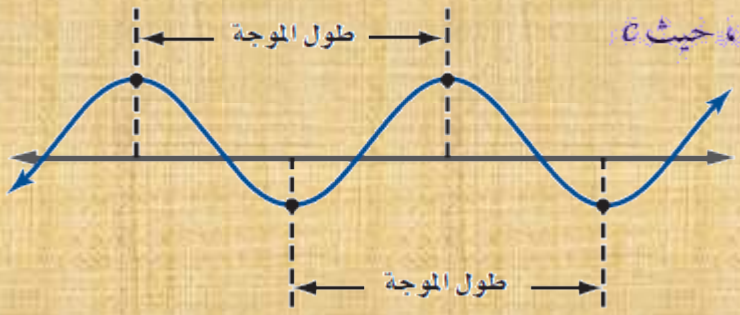
30



- قيمة x التي تكون الدالة غير متصلة عندها هي $x = 0$.
- نوع عدم الاتصال: لا نهائي (غير معرفة والنهاية غير موجودة عند $x=0$)
- سلوك طرفي التمثيل البياني $\lim_{x \to \pm\infty} h(x) = 0$

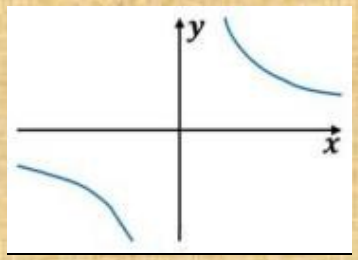
للحل

31 **فيزياء:** تُسمّى المسافة بين نقطتين متناظرتين على موجتي ضوء متتاليتين بطول الموجة λ (ويقرأ لامدا)، ويُسمى عدد الموجات الكاملة التي تمر بنقطة خلال مدة زمنية محددة بالتردد f.



وتصف الدالة $f(\lambda) = \frac{c}{\lambda}$ العلاقة بين طول الموجة والتردد، حيث c سرعة الضوء ومقدارها $2.99 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

a) مثّل الدالة بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.



b) استعمل المنحنى لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني. وعزز تخمينك عدديًّا.

$$\lim_{x \to -\infty} f(\lambda) = \lim_{x \to \infty} f(\lambda) = 0$$

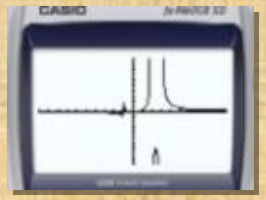
c) هل الدالة متصلة؟ إذا كان الجواب لا، فعيّن نقاط عدم الاتصال.

لا، عدم اتصال لا نهائي عند $\lambda = 0$

الحل

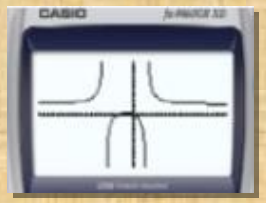
الحاسبة البيانية: مثِّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا، ثم حدد ما إذا كانت متصلة أو لا. وإذا كانت غير متصلة، فحدد نوع عدم الاتصال وحدد نقاطه. ثم صف سلوك طرفي التمثيل البياني، وعيِّن أصفار الدالة إن وجدت.

32 $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$



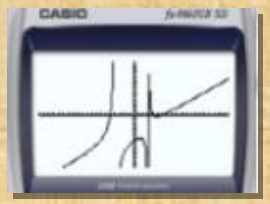
الدالة	غير متصلة
نوعها	لا نهائي، عند $x = 3$, $x = 2$, $x = -1$
سلوك نهاية الدالة	$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$
أصفار الدالة	$x = 0$

33 $h(x) = \dfrac{4x^2 + 11x - 3}{x^2 + 3x - 18}$



الدالة	غير متصلة
نوعها	لا نهائي، عند $x = 3$, $x = -6$
سلوك نهاية الدالة	$\lim_{x \to} h(x) = \lim_{x \to -\infty} h(x) = 4$
الأصفار	$x = -3$ ، $x = 0.25$

34 $h(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2 - 26x + 120}{x^2 + x - 12}$

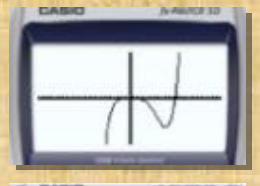


الدالة	غير متصلة
نوعها	لا نهائي، عند $x = 3$, $x = -4$
سلوك نهاية الدالة	$\lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$ $\lim_{x \to \infty} h(x) = \infty$
الأصفار	$x = 6$ ، $x = 4$ ، $x = -5$

الحل

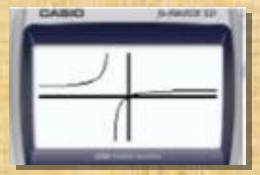
الحاسبة البيانية: مثّل بيانيًّا كلًّا من الدوال الآتية وَصِف سلوك طرفي التمثيل البياني، وعزز إجابتك عدديًّا.

35 $g(x) = x^5 - 20x^4 + 2x^3 - 5$



$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ ، $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

36 $f(x) = \frac{16x^2}{x^2 + 15x}$



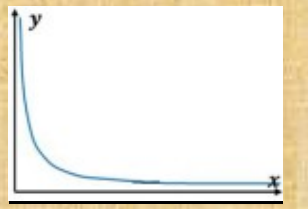
$\lim_{x \to \infty} f(x) = 16$ ، $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 16$

37 **أعمال:** بدأ حمد مشروعًا تجاريًّا صغيرًا بالطباعة على القمصان وبيعها. إذا كانت تكلفة الطباعة على القميص الواحد 9 ريالات وتكلفة المعدات اللازمة 12000 ريال. فأجب عما يأتي:

a) اكتب دالة تبيّن معدّل تكلفة الطباعة على القميص الواحد على صورة دالة في عدد القمصان المنتجة n.

$f(n) = \frac{9n + 12000}{n}$

b) استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة.



c) إذا استمر ازدياد عدد القمصان المنتجة، فكم سيصبح معدل تكلفة الطباعة على القميص الواحد؟

9 ريالات، عندما تؤول n إلى ∞، فإن $f(n)$ تؤول إلى 9. لذا يكون معدل تكلفة القميص الواحد 9 ريالات عندما يتزايد عدد القمصان المبيعة بشكل كبير.

للحل

38 **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة النهايات.

افرض أن $f(x) = \frac{ax^3 + b}{cx^3 + d}$، حيث a و c عددان صحيحان لا يساويان الصفر، و b و d عددان صحيحان.

a) **جدوليًا:** افرض أن $c = 1$ و اختر ثلاث مجموعات مختلفة لقيم a, b, d. ثم اكتب الدالة في كل حالة وأكمل الجدول :

$c = 1$				
a	b	d	$\lim_{x\to\infty} f(x)$	$\lim_{x\to-\infty} f(x)$
3	2	4	3	3
-1	5	7	-1	-1
9	-6	8	9	9

b) **جدوليًا:** اختر ثلاث مجموعات مختلفة من القيم لكل متغير، مجموعة فيها $a > c$، ومجموعة فيها $a < c$، ومجموعة فيها $a = c$. ثم اكتب كل دالة، وكوّن جدولًا كما في الفرع a.

	$f(x) = \frac{ax^3+b}{cx^3+d}$					
	a	b	C	d	$\lim_{x\to\infty} f(x)$	$\lim_{x\to-\infty} f(x)$
$a>c$	6	-5	3	1	2	2
$a<c$	3	4	12	13	0.25	0.25
$a=c$	7	1	7	-4	1	1

c) **تحليليًا:** خمّن قيمة نهاية الدالة $f(x) = \frac{ax^3 + b}{cx^3 + d}$ عندما تقترب x من $-\infty$، و $+\infty$.

نهاية الدالة $f(x) = \frac{ax^3+b}{cx^3+d}$ عندما تقترب x من كل من ∞، $-\infty$ تساوي $\frac{a}{c}$.

للحل

39 **الحاسبة البيانية:** مثّل 6 دوال مختلفة على الصورة $f(x) = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2}$ بيانيًا، حيث n, a, b أعداد صحيحية غير سالبة.

a) خمّن سلوك طرفي التمثيل البياني عندما تكون n عددًا زوجيًّا موجبًا، ثم عزز إجابتك بيانيًّا.

إذا كان n عدداً زوجيًا، فإن طرفي المنحنى يقتربان من ∞.

b) خمّن سلوك طرفي التمثيل البياني عندما تكون n عددًا فرديًّا موجبًا ، ثم عزز إجابتك بالتمثيل البياني.

إذا كان n عدداً فردياً، فإن طرف التمثيل البياني من اليسار يؤول إلى $-\infty$ وطرف المنحنى من اليمين يؤول إلى ∞.

القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

1-4

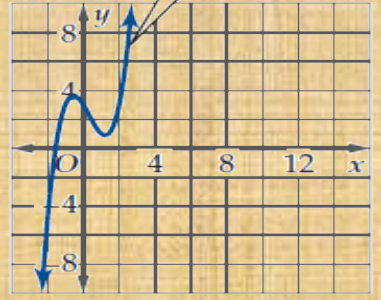
تدرب وحل المسائل

الحل

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة. ثم عزز إجابتك عدديًا: (مثال 1)

1

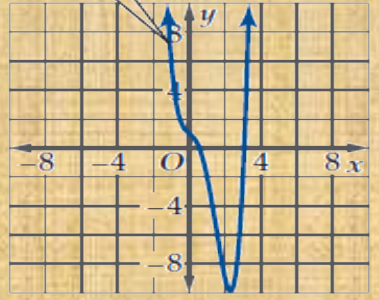
$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 3$



f متزايدة في الفترة $(-\infty, -0.5)$،
ومتناقصة في الفترة $(-0.5, 1)$،
ومتزايدة في الفترة $(1, \infty)$.

2

$f(x) = x^4 - 3x^3 - x + 1$

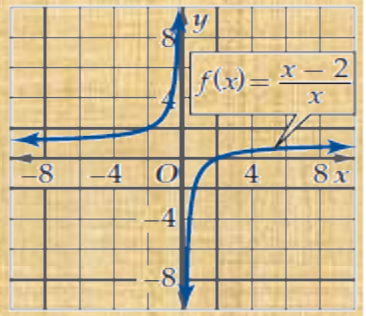


f متناقصة في الفترة $(-\infty, 2.5)$،
ومتزايدة في الفترة $(2.5, \infty)$.

عودة لفهرس الفصل (1)

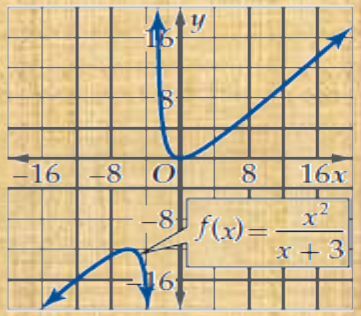
الحل

3



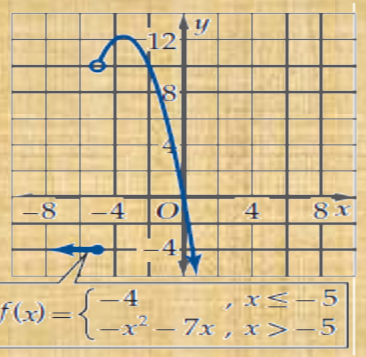
f متزايدة في الفترة $(-\infty, 0)$، ومتزايدة في الفترة $(0, \infty)$.

4



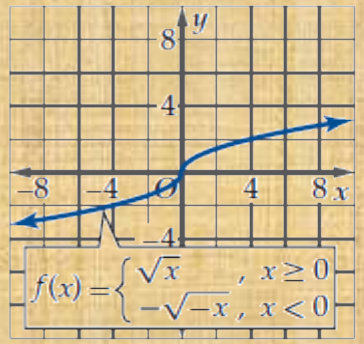
f متزايدة في الفترة $(-\infty, -6)$، ومتناقصة $(-6, -3)$، ومتناقصة في الفترة $(-3, 0)$، ومتزايدة في الفترة $(0, \infty)$.

5



f ثابتة في الفترة $(-\infty, -5)$، ومتزايدة في الفترة $(-5, -3.5)$، ومتناقصة في الفترة $(-3.5, \infty)$.

6

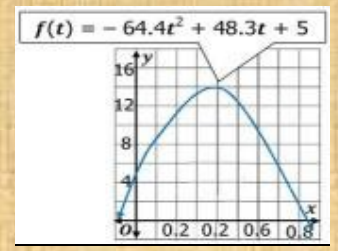


f متزايدة في الفترة $(-\infty, \infty)$.

للحل

7 **كرة سلة:** يعطى ارتفاع كرة سلة $f(t)$ عن سطح الأرض في الرمية الحرة بالدالة $f(t) = -64.4t^2 + 48.3t + 5$، حيث t الزمن بالثواني و $f(t)$ الارتفاع بالأقدام. (مثال 2)

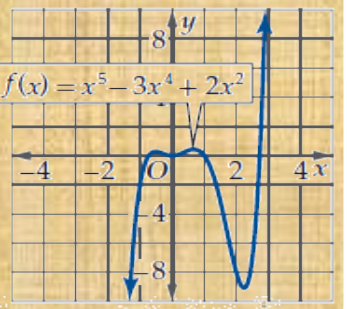
a) مَثِّل الدالة بيانيًّا.



b) أوجد قيمة تقريبية لأعلى ارتفاع تصل إليه الكرة. ثم عزز إجابتك عدديًّا. 14 ft

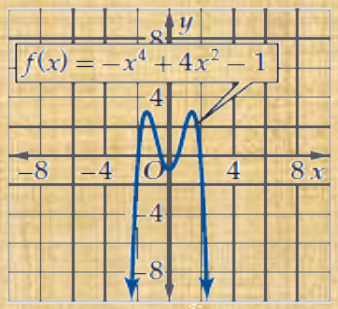
قدّر قيم x التي يكون لكلٍّ من الدوال الآتية عندها قيم قصوى مقرب إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبين نوع القيم القصوى، ثم عزز إجابتك عدديًّا. (مثال 2)

8



يتضح من التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية مقدارها 0.25 عند $x = -0.5$ ، 0.5، وقيمة صغرى محلية مقدارها 9 − عند $x = 2.5$، ولها قيمة صغرى محلية عند $x=0$ ومقدارها 0.

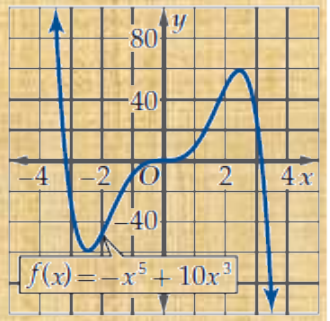
9



واضح من التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية مقدارها 3 عند $x = -1.5$ ، 1.5، ولها قيمة صغرى محلية مقدارها 1 − عند $x = 0$.

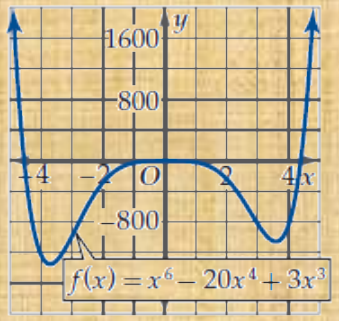
الحل

10



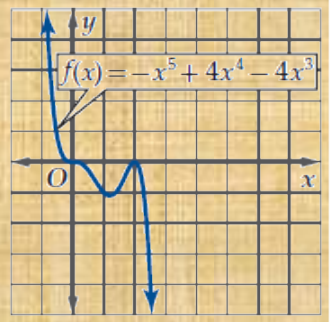
يتضح من التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية مقدارها 60 – عند $x = -2.5$ ، ولها قيمة عظمى محلية مقدارها 60 عند $x = 2.5$.

11



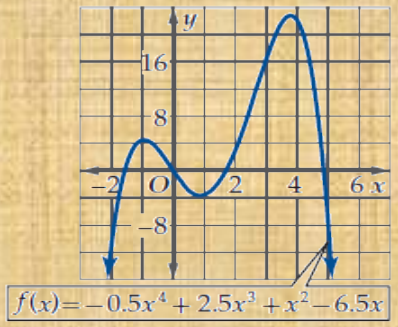
يتضح من التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية مقدارها 1100 – عند $x = 3.5$، ولها قيمة صغرى مطلقة مقدارها 1300 – عند $x = -3.5$، ولها قيمة عظمى محلية مقدارها 0 عند $x = 0$.

12



يتضح من التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية مقدارها 1 – عند $x = 1$، ولها قيمة عظمى محلية مقدارها 0 عند $x = 2$.

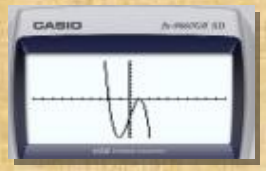
13



يتضح من التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية مقدارها 3.5 – عند $x = 1$، ولها قيمة عظمى محلية مقدارها 4.5 عند $x = -1$، ولها قيمة عظمى مطلقة مقدارها 22 عند $x = 4$.

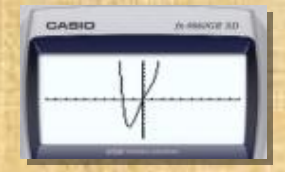
للحل

الحاسبة : أوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة مقربة إلى أقرب جزء من مئة لكل دالة فيما يأتي، وحّدد قيم x التي تكون عندها هذه القيم: (مثال 3)



14 $g(x) = -2x^3 + 7x - 5$

عظمى محلية عند (1.08, 0.04)؛ وصغرى محلية عند (−1.08, −10.04).



15 $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5x$

صغرى مطلقة عند (−1.38, −7.08).

16 $f(x) = -x^5 + 3x^2 + x - 1$

عظمى محلية عند (1.11, 2.12)؛ صغرى محلية عند (−0.17, −1.08).

17 $g(x) = x^6 - 4x^4 + x$

عظمى محلية عند (0.41, 0.30)؛ صغرى محلية عند (1.62, −7.85)؛ صغرى مطلقة عند (−1.64, −11.12).

18 $f(x) = 0.008x^5 - 0.05x^4 - 0.2x^3 + 1.2x^2 - 0.7x$

عظمى محلية عند (2.49, 1.45)، (−3.72, 14.23)؛ صغرى محلية عند (5.90, −6.83)، (0.32, −0.11).

19 $f(x) = 0.025x^5 - 0.1x^4 + 0.57x^3 + 1.2x^2 - 3.5x - 2$

عظمى محلية عند (−1.66, 3.43)؛ صغرى محلية عند (0.93, −3.82).

للحل

20 **هندسة:** أوجد كلًّا من طول نصف قطر الأسطوانة وارتفاعها في الشكل المجاور؛ ليكون حجمها أكبر ما يمكن (قرب إلى أقرب جزء من عشرة). (مثال 4)

المساحة الجانبية - مساحة القاعدة
تساوي 20.5π بوصة مربعة

نصف القطر = 2.6 بوصة , الارتفاع = 2.6 بوصة

أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة فيما يأتي في الفترة المعطاة. (مثال 5)

21 $g(x) = 3x^2 - 8x + 2, [4, 8]$

28

22 $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 6x - 1, [5, 9]$

4430

23 $f(x) = -2x^4 - 5x^3 + 4x - 6, [-1, 5]$

-309

24 $h(x) = -x^5 - 5x^2 + 6x - 9, [3, 6]$

-2550

25 $f(x) = \frac{x-3}{x}, [5, 12]$

0.05

26 $f(x) = \sqrt{x+8}, [-4, 4]$

0.183

للحل

27 **طقس:** إذا كان متوسط درجات الحرارة السيليزية لكل شهر في المدينة المنورة في سنة ما معطى بالدالة: $f(x) = -0.5455x^2 + 7.09x + 21.45$ ، حيث x تمثّل رقم الشهر، فمثلًا $x = 1$ تمثّل شهر يناير. فأوجد متوسط معدل التغير في كل من الفترتين الآتيتين: وبرر إجابتك. **(مثال 6)**

a) من أبريل إلى مايو

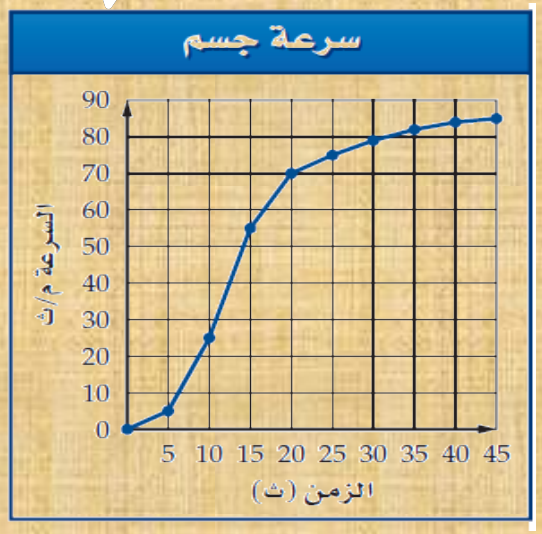
أبريل $(x_1 = 4)$ ، مايو $(x_2 = 5)$: 2.18

b) من يوليو إلى أكتوبر

يوليو $(x_1 = 7)$ ، أكتوبر $(x_2 = 10)$: -2.18

للحل

28 استعمل التمثيل البياني أدناه للإجابة عما يأتي:



a) أوجد متوسط معدل التغير في كلٍّ من الفترات $[5, 15]$, $[15, 20]$, $[25, 45]$.

الفترة	متوسط معدل التغير
$[25, 45]$	0.5
$[15, 20]$	3
$[5, 15]$	5

b) قارن بين سرعات الجسم في هذه الفترات الزمنية.

تتزايد سرعة الجسم أو تتسارع الجسم في الفترات الثلاث، وأكبر معدل تسارع للجسم في الفترة $[5 , 15]$ ويبطئ التسارع في الفترة $[25 , 45]$ ، لكن تبقى سرعة الجسم في تزايد.

للحل

29 **تكنولوجيا:** تبين لفريق بحث في إحدى شركات الحاسوب أن الربح الذي تكسبه الشركة من بيع منتج جديد من الشرائح الإلكترونية يعطى بالدالة $P(x) = -x^3 + 5x^2 + 8x$، حيث x ثمن بيع الشريحة الواحدة بمئات الريالات، $0 \le x \le 6$.

a) مثّل الدالة بيانيًّا.

b) أوجد أفضل سعر للشريحة الواحدة والذي يعطي أكبر ربح.

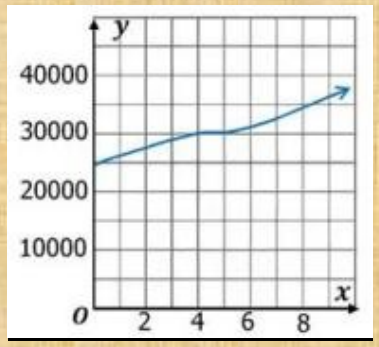
c) أوجد ربح الشريحة الواحدة عند بيعها بالسعر الأفضل.

الحل

30 **دخل:** افرض أن الدخل السنوي (بالريال) لشخص منذ عام 1420هـ وحتى عام 1430 هـ يعطى بالدالة:

$$I(x) = -1.465x^5 + 35.51x^4 - 277.99x^3 + 741.06x^2 + 847.8x + 25362, 0 \le x \le 10$$

حيث x رقم السنة.



a) مثّل الدالة بيانيًّا.

b) أوجد متوسط معدل تغير الدخل من عام 1423 إلى عام 1430 هـ. وماذا تعني قيمة متوسط التغير في هذه الفترة؟

متوسط معدل التغير في دخل الفرد من عام 1420 إلى عام 1430 لهذا الشخص 1280.90ريالا .

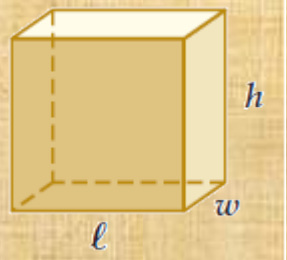
c) حدّد السنوات الأربع التي يكون فيها متوسط معدل التغير أكبر ما يمكن، والسنوات الأربع التي يكون فيها أقل ما يمكن.

متوسط التغير أقل مايمكن في الفترة من عام 1420 إلى عام 1424 ومقداره 826.43ريالا وكان أعلى ما يمكن في الفترة من عام 1423 إلى عام 1427 ومقداره 1711.44ريال

للحل

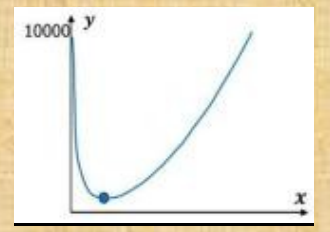
31

صندوق: يرغب سالم بعمل صندوق مغلق من الكرتون حجمه 3024 قدمًا مكعبة. إذا كانت قاعدة الصندوق مربعة الشكل، فأوجد أبعاده التي تجعل مساحة سطحه أقل ما يمكن . وضّح إجابتك.



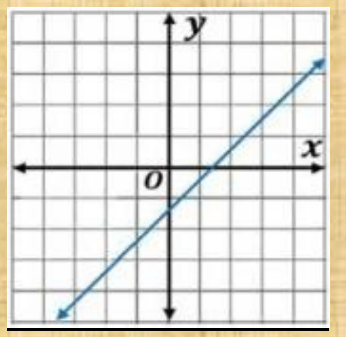
إجابة ممكنة : 14.5tf × 14.5tf ×14.5 ft

الدالة التي تعطي مساحة السطح الخارجي للصندوق بدلالة طول ضلع القاعدة هي $f(w)=2w^2+\frac{12096}{w}$. يظهر تمثيل الدالة أن القيمة الصغرى المطلقة تكون عندما $w=14.5\text{ft}$.

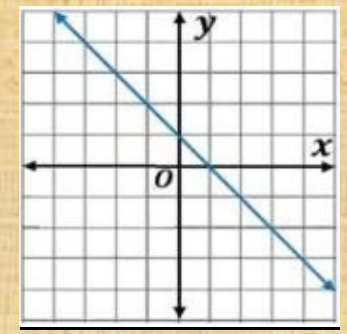


مثل بيانيًّا الدالة $f(x)$ في كل حالة مما يأتي:

32 $f(x)$ متصلة ومتزايدة.

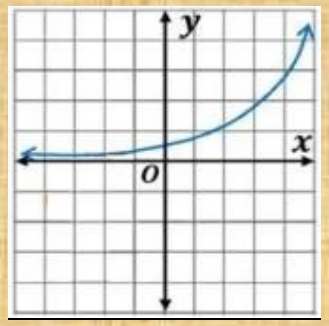


33 $f(x)$ متصلة ومتناقصة.

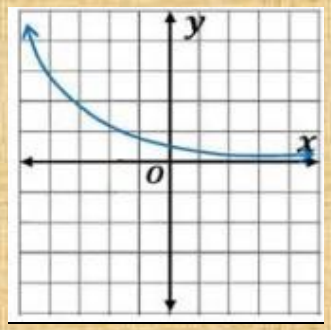


للحل

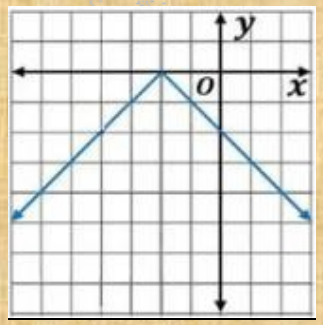
34 $f(x)$ متصلة ومتزايدة، $f(x) > 0$ لجميع قيم x.



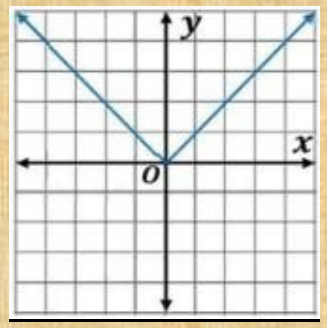
35 $f(x)$ متصلة ومتناقصة، $f(x) > 0$ لجميع قيم x.



36 $f(x)$ متصلة، ومتزايدة لجميع قيم $x < -2$، ومتناقصة لجميع قيم $x > -2$.



37 $f(x)$ متصلة، ومتناقصة لجميع قيم $x < 0$، ومتزايدة لجميع قيم $x > 0$.



للحل

حدّد إحداثيي النقطة التي يكون عندها لكل دالة مما يأتي قيمة قصوى مطلقة إن وجدت، وبين نوعها:

38 $f(x) = 2(x - 3)^2 + 5$

صغرى

39 $f(x) = -0.5(x + 5)^2 - 1$

عظمى

40 $f(x) = -4|x - 22| + 65$

عظمى

41 $f(x) = (36 - x^2)^{0.5}$

عظمى

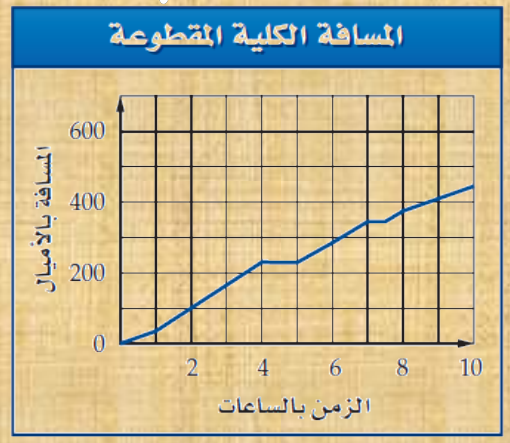
42 $f(x) = x^3 + x$

لا يوجد قيم قصوى

للحل

43

سفر: قام عبد الله بتسجيل المسافة الكلية التي قطعتها عائلته في إحدى الرحلات ومثلها بيانيًا. أعط أسبابًا توضح اختلاف متوسط معدل التغير، ولماذا يكون ثابتًا في فترتين؟



أحد أسباب الاختلاف في متوسط معدل التغير هو أن عبد الله قد واجهته إشارات ضوئية في أثناء مسيره مما أدى إلى نقص في معدل المسافة المقطوعة, وسبب آخر أنه سلك طرقًا فرعية في الساعة الأولى من الرحلة قبل أن يدخل طريقًا سريعًا في الساعات الثلاث اللاحقة. الفترتان اللتان يبدو فيهما أنه لم يتحرك قد تكونان فترتي استراحة أو لتناول الطعام, وربما كان سبب التوقف وجود حادث أدى إلى توقف حركة السير.

الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

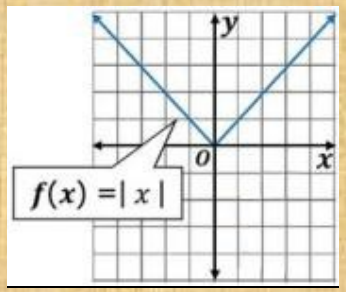
1-5

تدرب وحل المسائل

الحل

صف خصائص كل دالة من الدوال الرئيسة (الأم) الآتية: المجال، والمدى، والمقطع x ، والمقطع y، والتماثل، والاتصال، وسلوك طرفي التمثيل البياني، وفترات التزايد والتناقص: (مثال 1)

1 $f(x) = [\![x]\!]$

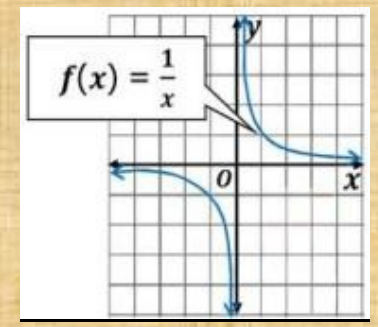


* مجال الدالة $\{x \mid x \in R\}$، ومداها $\{y \mid y \geq 0 , y \in R\}$.
* للمنحنى مقطع واحد عند (0 , 0).
* منحنى الدالة متماثل حول y؛ لذا فالدالة زوجية.
* المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
* يبدأ المنحنى عند $x = 0$. وينتهي بـ $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$.
* المنحنى متناقص في الفترة $(-\infty , 0)$، ومتزايد في الفترة $(0 , \infty)$.

عودة لفهرس الفصل (1)

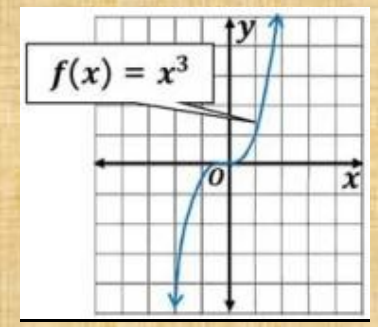
للحل

2 $f(x) = \frac{1}{x}$



* مجال الدالة $\{x | x \neq 0, x \in R\}$، ومداها $\{y | y \neq 0, y \in R\}$.
* المنحنى لا يقطع أياً من المحورين.
* منحنى الدالة متماثل حول نقطة الأصل؛ لذا فالدالة فردية.
* للدالة عدم اتصال لا نهائي عند $x = 0$.
* $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$
* الدالة متناقصة في الفترة $(0 , \infty)$ ، $(-\infty , 0)$

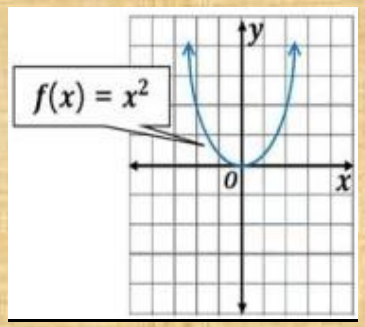
3 $f(x) = x^3$



* مجال الدالة $\{x | x \in R\}$، ومداها $\{y | y \in R\}$.
* يقطع المنحنى المحورين عند النقطة $(0 , 0)$.
* المنحنى متماثل حول نقطة الأصل؛ لذا فهي دالة فردية.
* المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
* $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
* المنحنى متزايد على الفترة $(-\infty , \infty)$

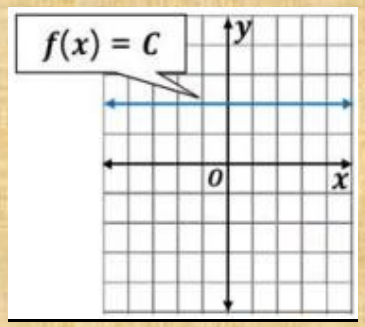
للحل

4 $f(x) = x^2$



* مجال الدالة $\{ x \mid x \in R \}$، ومداها $\{ y \mid y \geq 0 , y \in R \}$.
* يقطع المنحنى المحورين عند النقطة $(0 , 0)$.
* المنحنى متماثل حول المحور y؛ لذا فهي دالة زوجية.
* المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$
* المنحنى متناقص على الفترة $(-\infty , 0)$، ومتزايد على الفترة $(0 , \infty)$.

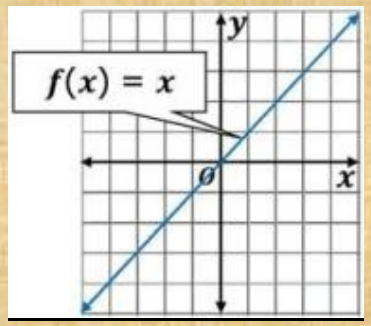
5 $f(x) = c$



* مجال الدالة جميع الأعداد الحقيقية، ومداها $\{ C \}$.
* يقطع المنحنى محور y عند النقطة $(0 , C)$، وإذا كان $C = 0$ فيقطع المنحنى المحور x عند عدد لا نهائي من النقاط.
* المنحنى متماثل حول المحور y؛ لذا فهي دالة زوجية.
* المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = c$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = c$
* المنحنى ثابت في الفترة $(-\infty , \infty)$

للحل

6 $f(x) = x$

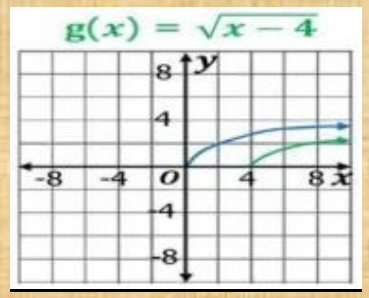


- مجال الدالة $\{ x \mid x \in R \}$، ومداها $\{ y \mid y \in R \}$،
- يقطع المنحنى المحورين عند النقطة (0 , 0).
- المنحنى متماثل حول نقطة الأصل؛ لذا فهي دالة فردية.
- المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- المنحنى متزايد على الفترة $(-\infty , \infty)$

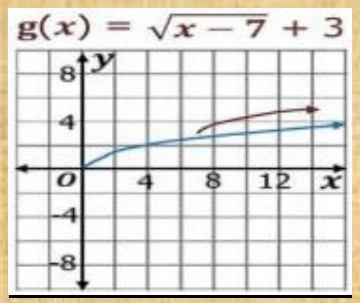
الحل

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)=\sqrt{x}$ لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين: (مثال 2)

7 $g(x)=\sqrt{x-4}$

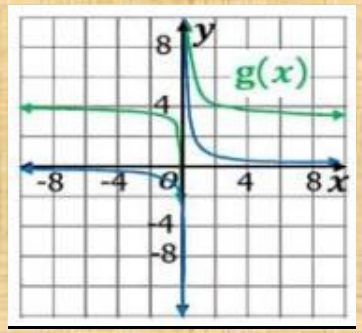


8 $g(x)=\sqrt{x-7}+3$

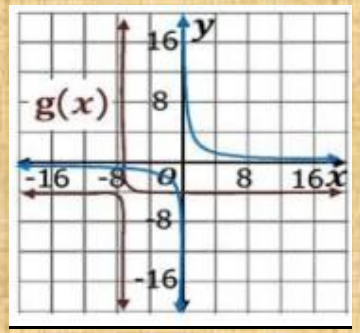


استعمل الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)=\frac{1}{x}$ لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين: (مثال 2)

9 $g(x)=\frac{1}{x}+4$



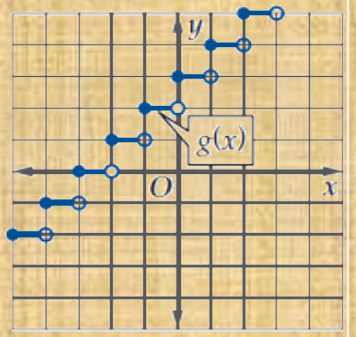
10 $g(x)=\frac{1}{x+7}-4$



الحل

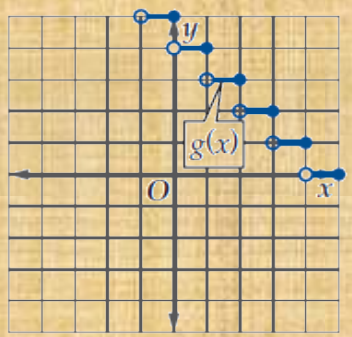
صف العلاقة بين منحنى $f(x) = [\![x]\!]$ و $g(x)$ في كلٍّ من الحالتين الآتيتين، ثم اكتب معادلة الدالة $g(x)$. (مثال 3)

11



منحنى $g(x)$ عبارة عن منحنى $f(x)$ تحت تأثير انسحاب مقداره 3 وحدات إلى اليسار $g(x) = [\![x+3]\!]$.

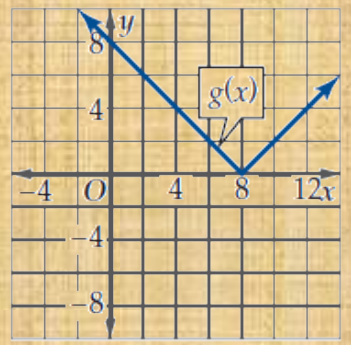
12



منحنى $g(x)$ عبارة عن منحنى $f(x)$ بانعكاس حول المحور y, يتبعه انسحاب مقداره 4 وحدات إلى اليمين : $g(x) = -[\![x-4]\!]$.

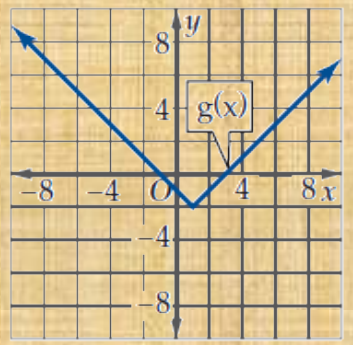
صف العلاقة بين منحنى $f(x) = |x|$ و $g(x)$ في كل من الحالتين الآتيتين، ثم اكتب معادلة الدالة $g(x)$: (مثال 3)

13



منحنى $g(x)$ عبارة عن منحنى $f(x)$ تحت تأثير انسحاب مقداره 8 وحدات إلى اليمين: $g(x) = |x-8|$.

14

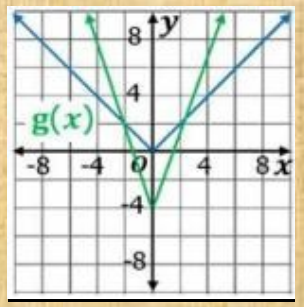


منحنى $g(x)$ عبارة عن منحنى $f(x)$ تحت تأثير انسحاب مقداره وحدة واحدة إلى اليمين و وحدتان إلى الأسفل: $g(x) = |x-1| - 2$.

للحل

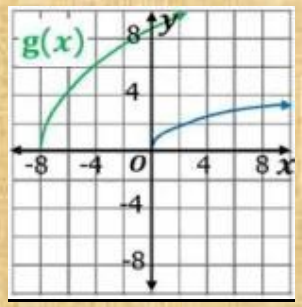
اكتب الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، وصف العلاقة بين المنحنيين ومثلهما في مستوى إحداثي واحد. (مثال 4)

15 $g(x) = 3|x| - 4$



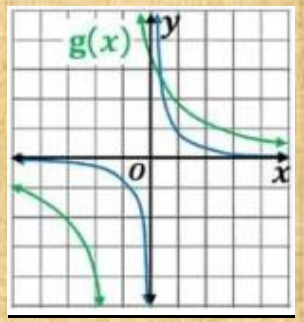
$f(x) = |x|$: منحنى $g(x)$ هو توسع رأسي بمعامل 4 وحدات إلى الأسفل للدالة $f(x)$.

16 $g(x) = 3\sqrt{x+8}$



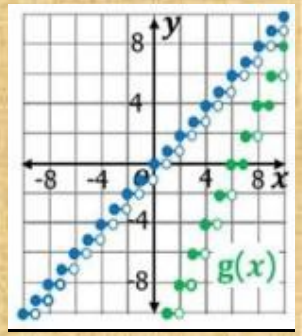
$f(x) = \sqrt{x}$: منحنى $g(x)$ هو توسع رأسي بمعامل 3 وانسحاب مقداره 8 وحدات إلى اليسار لمنحنى $f(x)$.

17 $g(x) = \frac{4}{x+1}$



$f(x) = \frac{1}{x}$: منحنى $g(x)$ هو توسع رأسي بمعامل 4 وانسحاب بمقدار وحدة واحدة إلى اليسار لمنحنى $f(x)$.

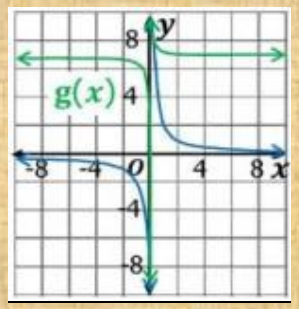
18 $g(x) = 2[\![x - 6]\!]$



$f(x) = [\![x]\!]$: منحنى $g(x)$ هو انعكاس حول المحور y، ثم توسع رأسي و انسحاب مقداره وحدتان إلى اليمين لمنحنى $f(x)$.

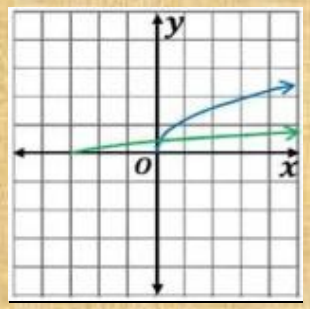
الحل

19 $g(x) = \frac{1}{6x} + 7$



منحنى $g(x)$ هو تصوّر رأسي يتبعه انسحاب مقداره 7 وحدات إلى الأعلى لمنحنى $f(x)=\frac{1}{x}$.

20 $g(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{4}$



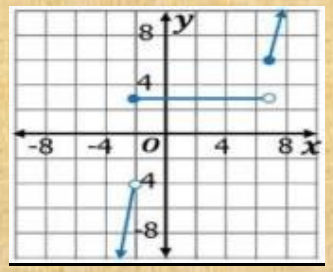
منحنى $g(x)$ هو تصوّر رأسي يتبعه انسحاب مقداره 3 وحدات إلى اليسار لمنحنى $f(x)=\sqrt{x}$.

الحل

مثّل منحنى كل من الدوال الآتية بيانيًّا: (مثال 5)

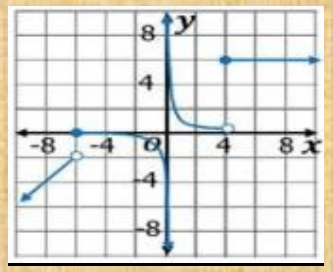
21

$$f(x)=\begin{cases} -x^2 & , \quad x<-2 \\ 3 & , \quad -2\le x<7 \\ (x-5)^2+2 & , \quad x\ge 7 \end{cases}$$



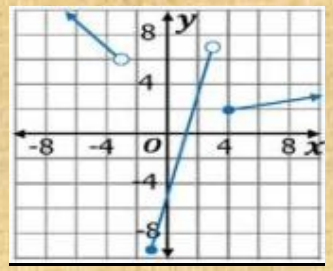
22

$$g(x)=\begin{cases} x+4 & , \quad x<-6 \\ \dfrac{1}{x} & , \quad -6\le x<4 \\ 6 & , \quad x\ge 4 \end{cases}$$



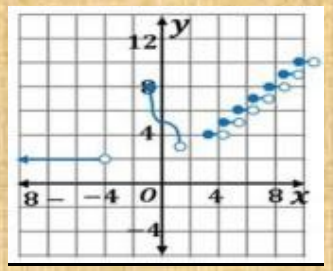
23

$$h(x)=\begin{cases} |x-5| & , \quad x<-3 \\ 4x-3 & , \quad -1\le x<3 \\ \sqrt{x} & , \quad x\ge 4 \end{cases}$$



24

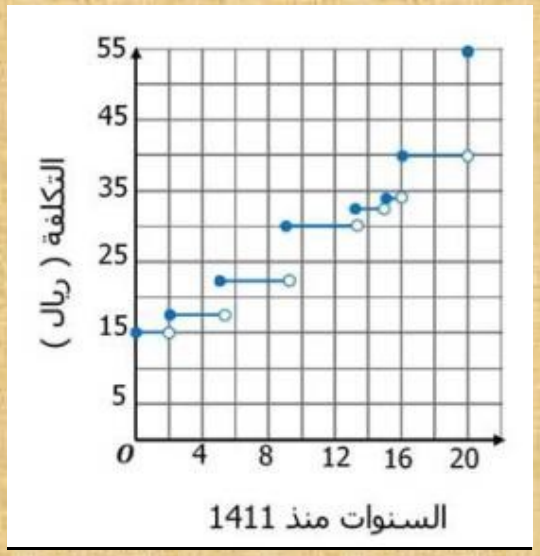
$$g(x)=\begin{cases} 2 & , \quad x<-4 \\ x^4-3x^3+5 & , \quad -1\le x<1 \\ [\![x]\!]+1 & , \quad x\ge 3 \end{cases}$$



للحل

25 **أسعار:** يبين الجدول أدناه سعر سلعة منذ سنة 1411هـ حتى 1431هـ .
استعمل هذه البيانات لتمثيل دالة درجية. (مثال 5)

السنة	1411	1413	1416	1420	1424	1426	1427	1431
السعر (بالريال)	15	17	22	30	32	33	40	55



للحل

26 **أعمال:** قدمت إحدى شركات الهواتف المحمولة عرضًا لمشتركي شبكتها بحيث يدفع المشترك مبلغًا ثابتًا شهريًا مقداره 20 ريالًا، ويدفع 0.2 ريال مقابل كل دقيقة اتصال. إن تكلفة هذا العرض على المشترك تعطى بالدالة $c(x) = 20 + 0.2\,[\![x]\!]$، حيث x عدد دقائق الاتصال. (مثال 6)

a) صف التحويلات الهندسية التي تطبق على الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = [\![x]\!]$ لتمثيل الدالة $c(x)$.

منحنى $c(x)$ هو تصبيق رأسي لمنحنى $f(x)$ ، يتبعه انسحاب مقداره 20.

b) إذا قدمت الشركة عرضًا آخر بحيث يدفع المشترك فيه 30 ريالًا شهريًا، ويدفع 0.1 ريال عن كل دقيقة اتصال. فاكتب الدالة التي تصف تكلفة هذا العرض.

$c(x) = 30 + 0.1\,[\![x]\!]$

c) هل يمكن أن تتساوى التكلفة في العرضين؟ وكم يكون عدد دقائق الاتصال في هذه الحالة؟

نعم، بعد 100 دقيقة.

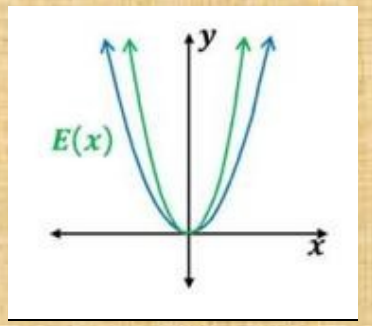
للحل

27 **فيزياء:** إذا علمت أن الطاقة المختزنة في نابض ما، تعطى بالدالة $E(x) = 4x^2$ حيث تقاس الطاقة E بالجول، وتقاس المسافة x بالمتر. (مثال 6)

a) صف التحويل الهندسي الذي تم على الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^2$ للحصول على الدالة $E(x)$.

توسع رأسي.

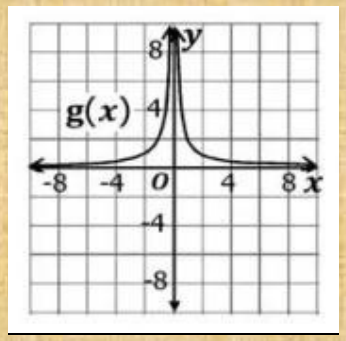
b) إذا كانت الطاقة المختزنة في نابض ما، آخر تعطى بالدالة $E(x) = 2x^2$، فمثِّل بيانيًّا كلًّا من الدالتين على الشاشة نفسها باستعمال الحاسبة البيانية.

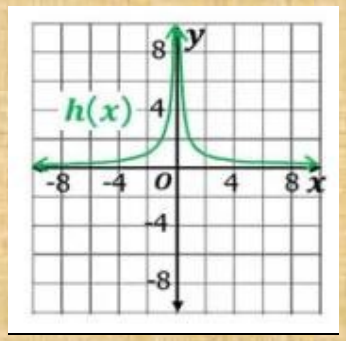


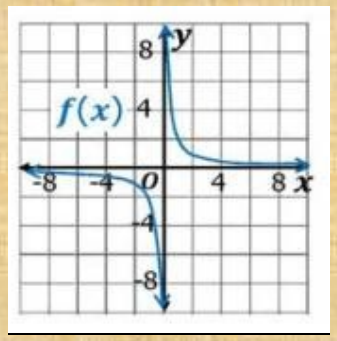
للحل

استعمل منحنى الدالة $f(x)$ في كل مما يأتي لتمثيل الدالتين $h(x) = f(|x|)$ ، $g(x) = |f(x)|$ بيانيًّا: (مثال 7)

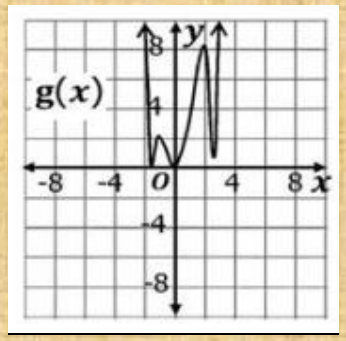
28 $f(x) = \frac{2}{x}$

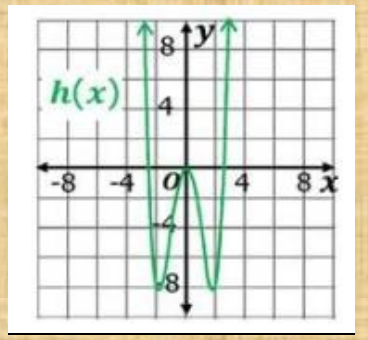


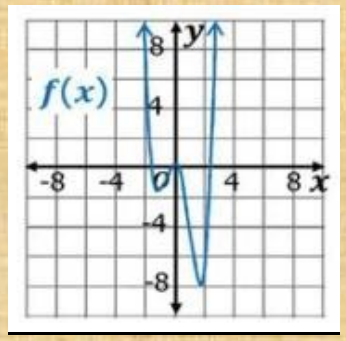




29 $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2$



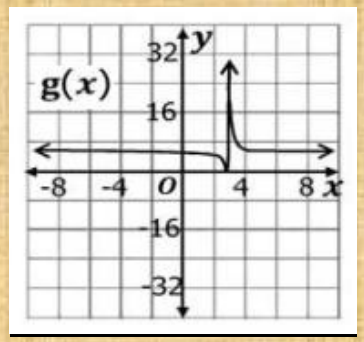


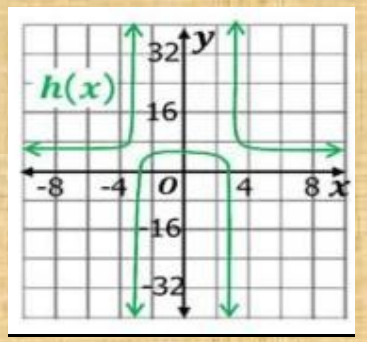


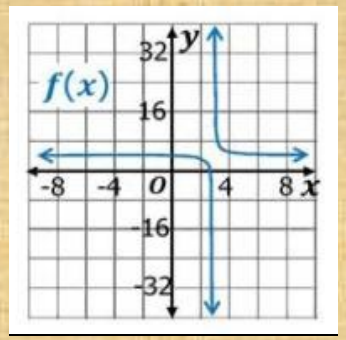
للحل

30

$$f(x) = \frac{1}{x-3} + 5$$

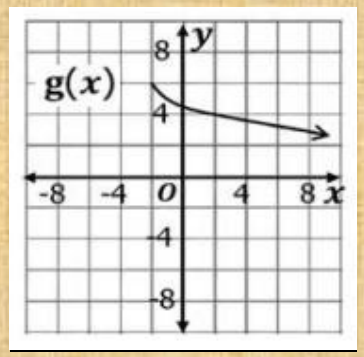


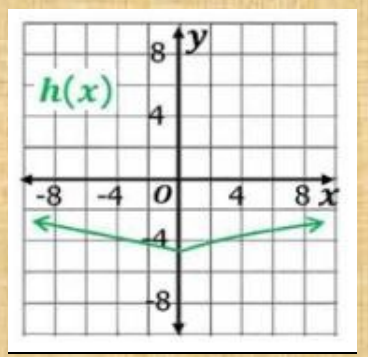


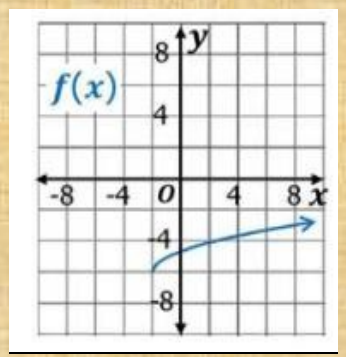


31

$$f(x) = \sqrt{x+2} - 6$$







الحل

اكتب الدالة الناتجة من إجراء التحويلات الهندسية المعطاة على الدالة الرئيسة (الأم) في كل من السؤالين الآتيين:

32 $f(x) = \frac{1}{x}$: انسحاب 5 وحدات إلى الأعلى، و 7 وحدات إلى اليسار، وتوسع رأسي معامله 2.

$$g(x) = \frac{2}{x+7} + 5$$

33 $f(x) = [\![x]\!]$: انعكاس في المحور x و انسحاب 4 وحدات إلى الأسفل، وتوسع رأسي معامله 3.

$$g(x) = -3[\![x]\!] - 4$$

الحل

فيزياء: إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم تعطى بالدالة $g(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$، حيث x_0 المسافة الابتدائية، و v_0 السرعة الابتدائية و a تسارع الجسم. صف التحويلات الهندسية التي تمت على الدالة الرئيسة (الأم) $f(t) = t^2$ للحصول على $g(t)$ في كل مما يأتي:

34 $x_0 = 0, v_0 = 2, a = 2$

انسحاب بمقدار وحدة واحدة إلى اليسار و وحدة واحدة إلى الأسفل.

35 $x_0 = 10, v_0 = 0, a = 2$

انسحاب بمقدار 10 وحدات إلى الأعلى .

36 $x_0 = 1, v_0 = 8, a = 4$

توسع رأسي ,تبعه انسحاب مقداره وحدتان إلى اليسار ثم انسحاب مقداره 7 وحدات إلى الأسفل.

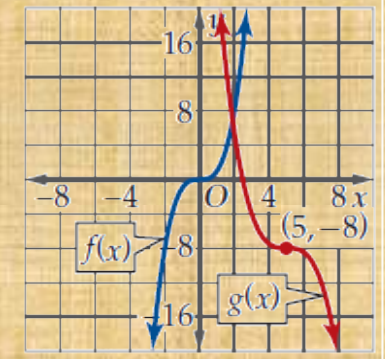
37 $x_0 = 3, v_0 = 5, a = 3$

توسع رأسي ,تبعه انسحاب مقداره $\frac{5}{3}$ وحدة إلى اليسار, ثم انسحاب مقداره $\frac{7}{6}$ وحداه إلى الأسفل .

للحل

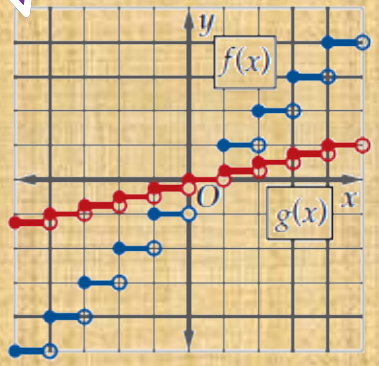
اكتب معادلة $g(x)$ في كل مما يأتي:

38



$g(x) = -0.5(x-5)^3 - 8$

39



$g(x) = \frac{1}{4}[\![x+8]\!] - 2$

40 **تسوق:** توقعت إدارة أحد المجمعات التجارية الجديدة أن يعطى عدد المتسوقين بالآلاف بالدالة $f(x) = \sqrt{7x}$ خلال أول ستين يومًا من الافتتاح، حيث x رقم اليوم بعد الافتتاح، $x = 1$ يرتبط بيوم الافتتاح. اكتب دالة $g(x)$ بدلالة $f(x)$ لكل حالة من الحالات الآتية:

a) زاد عدد الحضور 12% على المتوقع. $g(x) = 1.12\sqrt{7x}$

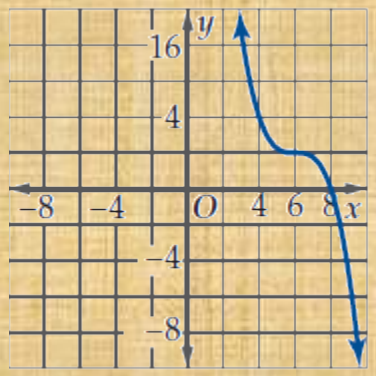
b) تأخر موعد الافتتاح 30 يومًا بسبب تأخر أعمال البناء. $g(x) = \sqrt{7(x-30)}$

c) نقص عدد المتسوقين 450 عن المتوقع. $g(x) = \sqrt{7x} - 0.45$

الحل

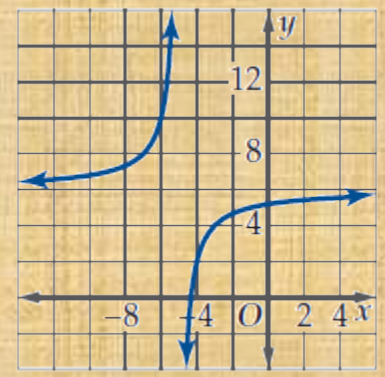
اكتب دالة تمثّل المنحنى في كل مما يأتي:

41



$$f(x) = -\frac{1}{4}(x-6)^3 + 2$$

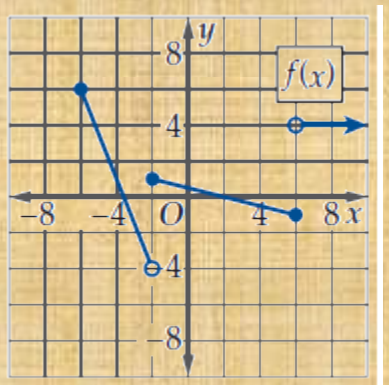
42



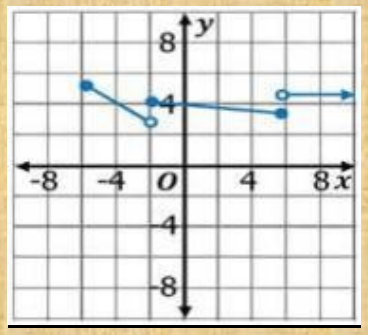
$$f(x) = -\frac{4}{x+5} + 6$$

للحل

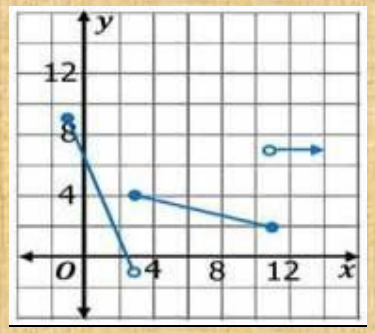
استعمل منحنى $f(x)$ لتمثيل منحنى $g(x)$ لكل مما يأتي:



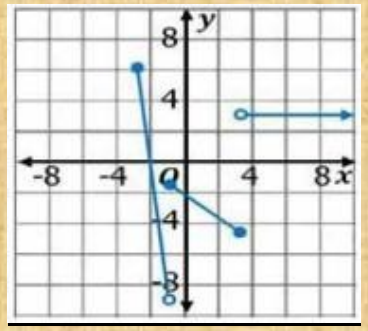
43 $g(x) = 0.25f(x) + 4$



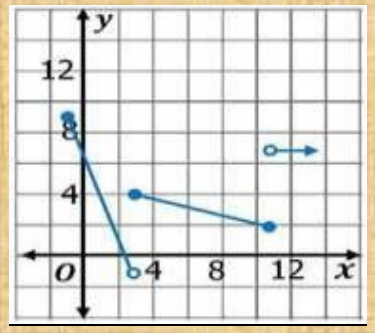
44 $g(x) = 3f(x) - 6$



45 $g(x) = f(x - 5) + 3$



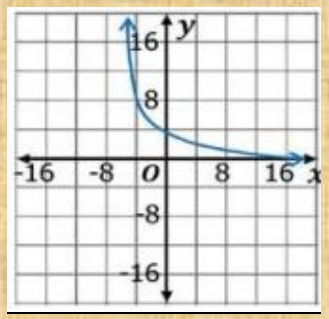
46 $g(x) = -2f(x) + 1$



للحل

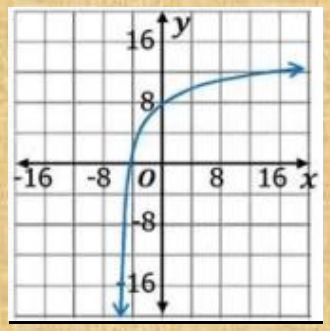
استعمل $f(x) = \frac{8}{\sqrt{x+6}} - 4$ لتمثيل كل دالة مما يأتي:

47 $g(x) = 2f(x) + 5$



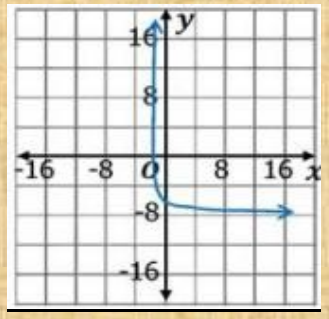
$g(x) = \frac{16}{\sqrt{x+6}} - 3$

48 $g(x) = -3f(x) + 6$



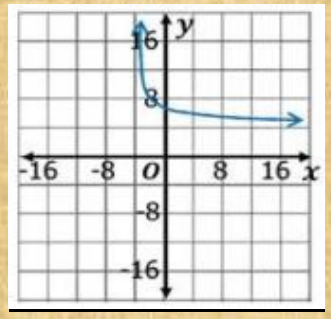
$g(x) = \frac{-24}{\sqrt{x+6}} + 18$

49 $g(x) = f(4x) - 5$



$g(x) = \frac{8}{\sqrt{4x+6}} - 9$

50 $g(x) = f(2x + 1) + 8$



$g(x) = \frac{8}{\sqrt{2x+7}} + 4$

للحل

51 **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة بعض العمليات على الدوال معتمدًا على الدوال الآتية:

- $f(x) = x^2 + 2x + 7$
- $g(x) = 4x + 3$
- $h(x) = x^2 + 6x + 10$

a) **جدوليًا:** اختر ثلاث قيم لـ a وأكمل الجدول الآتي:

a	$f(a)$	$g(a)$	$f(a) + g(a)$	$h(a)$
3	22	15	37	37
-4	15	-13	2	2
15	262	63	325	325

b) **لفظيًا:** ما العلاقة بين $f(x)$، $g(x)$، $h(x)$؟

$h(x)$ تساوي ناتج جمع $f(x)$ و $g(x)$.

c) **جبريًا:** أثبت صحة العلاقة التي حصلت عليها في الفرع b جبريًا.

$h(x) = f(x) + g(x)$

$x^2 + 2x + 7 + 4x + 3 = x^2 + 6x + 10$

العمليات على الدوال وتركيب دالتين

1-6

تدرب وحل المسائل

الحل

أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x)$, $g(x)$. في كل مما يأتي، وحدد مجال كل من الدوال الناتجة: (مثال 1)

1

$f(x) = x^2 + 4$

$g(x) = \sqrt{x}$

$(f+g)(x) =$	$x^2 + \sqrt{x} + 4$	$\{x \mid x \geq 0 , x \in R\}$	المجال
$(f-g)(x) =$	$x^2 - \sqrt{x} + 4$		
$(f \cdot g)(x) =$	$x^{\frac{5}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}}$		
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) =$	$x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{-1}{2}}$	$\{x \mid x > 0 , x \in R\}$	

2

$f(x) = 8 - x^3$

$g(x) = x - 3$

$(f+g)(x) =$	$-x^3 + x + 5$	$\{x \mid x \in R\}$	المجال
$(f-g)(x) =$	$-x^3 - x + 11$		
$(f \cdot g)(x) =$	$-x^4 + 3x^3 + 8x - 24$		
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) =$	$\frac{8 - x^3}{x - 3}$	$\{x \mid x \neq 3 , x \in R\}$	

عودة لفهرس الفصل (1)

للحل

3

$f(x) = x^2 + 5x + 6$

$g(x) = x + 2$

$(f+g)(x) =$	$x^2 + 6x + 8$	$\{x \mid x \in R\}$	المجال
$(f-g)(x) =$	$x^2 + 4x + 4$		
$(f \cdot g)(x) =$	$x^3 + 7x^2 + 16x + 12$		
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) =$	$x + 3$	$\{x \mid x \neq -2, x \in R\}$	

4

$f(x) = x^2 + x$

$g(x) = 9x$

$(f+g)(x) =$	$x^2 + 10x$	$\{x \mid x \in R\}$	المجال
$(f-g)(x) =$	$x^2 - 8x$		
$(f \cdot g)(x) =$	$9x^3 + 9x^2$		
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) =$	$\frac{x+1}{9}$	$\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$	

5

$f(x) = x - 7$

$g(x) = x + 7$

$(f+g)(x) =$	$2x$	$\{x \mid x \in R\}$	المجال
$(f-g)(x) =$	-14		
$(f \cdot g)(x) =$	$x^2 - 49$		
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) =$	$\frac{x-7}{x+7}$	$\{x \mid x \neq -7, x \in R\}$	

6

$f(x) = \frac{6}{x}$

$g(x) = x^3 + x$

$(f+g)(x) =$	$x^3 + x + \frac{6}{x}$	$\{x \mid x \neq 0, \in R\}$	المجال
$(f-g)(x) =$	$-x^3 - x + \frac{6}{x}$		
$(f \cdot g)(x) =$	$6x^2 + 6$		
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) =$	$\frac{6}{x^4+x^2}$		

الحل

7

$$f(x)=\frac{x}{4}$$
$$g(x)=\frac{3}{x}$$

$(f+g)(x)=$	$\frac{x^2+12}{4x}$	$\{x \mid x \neq 0 , x \in R\}$	المجال
$(f-g)(x)=$	$\frac{x^2-12}{4x}$		
$(f\,.\,g)(x)=$	$\frac{3}{4}$		
$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=$	$\frac{x^2}{12}$		

8

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$g(x)=4\sqrt{x}$$

$(f+g)(x)=$	$\frac{1}{\sqrt{x}}+4\sqrt{x}$	$\{x \mid x > 0 , x \in R\}$	المجال
$(f-g)(x)=$	$\frac{1}{\sqrt{x}}-4\sqrt{x}$		
$(f\,.\,g)(x)=$	4		
$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=$	$\frac{1}{4x}$		

9

$$f(x)=\sqrt{x+8}$$
$$g(x)=\sqrt{x+5}-3$$

$(f+g)(x)=$	$\sqrt{x+8}+\sqrt{x+5}-3$
$\{x \mid x \geq -5 , x \in R\}$	
$(f-g)(x)=$	$\sqrt{x+8}-\sqrt{x+5}+3$
$\{x \mid x \geq -5 , x \in R\}$	
$(f\,.\,g)(x)=$	$\sqrt{x^2+13x+40}-3\sqrt{x+8}$
$\{x \mid x \geq -5 , x \in R\}$	
$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=$	$\frac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{x+5}-3}$
$\{x \mid x \geq -5 , x \neq 4 , x \in R\}$	

10

$$f(x)=\sqrt{x+6}$$
$$g(x)=\sqrt{x-4}$$

$(f+g)(x)=$	$\sqrt{x+6}+\sqrt{x-4}$
$\{x \mid x \geq 4 , x \in R\}$	
$(f-g)(x)=$	$\sqrt{x+6}-\sqrt{x-4}$
$\{x \mid x \geq 4 , x \in R\}$	
$(f\,.\,g)(x)=$	$\sqrt{x^2+2x-24}$
$\{x \mid x \geq 4 , x \in R\}$	
$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=$	$\frac{\sqrt{x+6}}{\sqrt{x-4}}$
$\{x \mid x > 4 , x \in R\}$	

للحل

أوجد $[f \circ g](6)$ ، $[g \circ f](x)$ ، $[f \circ g](x)$ لكل زوج من الدوال الآتية. (مثال 2)

11

$f(x) = 2x - 3$

$g(x) = 4x - 8$

$[g \circ f](x) =$	$8x - 20$
$[f \circ g](x) =$	$8x - 19$
$[f \circ g](6) =$	29

12

$f(x) = -2x^2 - 5x + 1$

$g(x) = -5x + 6$

$[g \circ f](x) =$	$10x^2 + 25x + 1$
$[f \circ g](x) =$	$-50x^2 + 145x - 101$
$[f \circ g](6) =$	-1031

13

$f(x) = x^2 - 16$

$g(x) = x^2 + 7x + 11$

$[g \circ f](x) =$	$x^4 - 25x^2 + 155$
$[f \circ g](x) =$	$x^4 + 14x^3 + 71x^2 + 145x + 105$
$[f \circ g](6) =$	7905

14

$f(x) = 2 + x^4$

$g(x) = -x^2$

$[g \circ f](x) =$	$-x^8 - 4x^4 - 4$
$[f \circ g](x) =$	$2 + x^8$
$[f \circ g](6) =$	1679618

للحل

حدِّد مجال $f \circ g$، ثم أوجد $f \circ g$ لكل زوج من الدوال الآتية: (مثال 3)

15

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$
$$g(x) = x^2 - 4$$

$(f \circ g)(x) =$	$\frac{1}{x^2-3}$
مجال $f \circ g$	$\{x \mid x \neq \pm\sqrt{3}, x \in R\}$

16

$$f(x) = \frac{2}{x-3}$$
$$g(x) = x^2 + 6$$

$(f \circ g)(x) =$	$\frac{2}{x^2+3}$
مجال $f \circ g$	$\{x \mid x \in R\}$

17

$$f(x) = \sqrt{x+4}$$
$$g(x) = x^2 - 4$$

$(f \circ g)(x) =$	x
مجال $f \circ g$	$\{x \mid x \in R\}$

18

$$f(x) = \frac{5}{x}$$
$$g(x) = \sqrt{6-x}$$

$(f \circ g)(x) =$	$\frac{5}{\sqrt{6-x}}$
مجال $f \circ g$	$\{x \mid x < 6, x \in R\}$

19

$$f(x) = -\frac{4}{x}$$
$$g(x) = \sqrt{x+8}$$

$(f \circ g)(x) =$	$\frac{-4}{\sqrt{x+8}}$
مجال $f \circ g$	$\{x \mid x > -8, x \in R\}$

20

$$f(x) = \sqrt{x+5}$$
$$g(x) = x^2 + 4x - 1$$

$(f \circ g)(x) =$	$x + 2$
مجال $f \circ g$	$\{x \mid x \in R\}$

للحل

21 **النظرية النسبية:** في النظرية النسبية $m(v) = \frac{100}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$،

حيث c سرعة الضوء وتساوي 300 مليون متر في الثانية و m كتلة جسم يسير بسرعة v متر في الثانية وكتلته الأصلية 100 kg. (مثال 4)

a) هل توجد قيود على مجال الدالة m؟ برر إجابتك.

مجال الدالة هو $\{v \in R, 10 \leq v < c\}$: قيود الدالة هي لا يمكن أن تكون سرعة الجسم مساوية لسرعة الضوء؛ لأنك تحصل على $\frac{100}{0}$، وهي كمية غير معرفة. كذلك لا تكون v أكبر من c؛ لأنك تحصل على عدد سالب تحت الجذر التربيعي، وهذه كمية غير معرفة، وأخيرا لا تكون السرعة أقل من صفر؛ لأن السرعة ليست سالبة.

b) أوجد $m(10), m(10000), m(1000000)$.

$m(10) =$	$100kg$
$m(10000) \approx$	$100.0000001kg$
$m(1000000) \approx$	$100.0005556kg$

c) صف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة $m(v)$ عندما تصبح v كبيرة جدًا.

عندما تزداد قيمة v تؤول $m(v)$ إلى ∞

d) اكتب الدالة على صورة تركيب دالتين.

$m(v) = f(g(v))$

$f(v) = \frac{100}{\sqrt{1-v^2}}$ ، $g(v) = \frac{v}{c}$

الحل

أوجد دالتين f و g لكل مما يأتي بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$ ، على ألا تكون أيّ منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$.
(مثال 4)

22 $h(x) = \sqrt{4x + 2} + 7$

$f(x) = \sqrt{x} + 7$; $g(x) = 4x + 2$

23 $h(x) = \frac{6}{x + 5} - 8$

$f(x) = \frac{6}{x} - 8$; $g(x) = x + 5$

24 $h(x) = |4x + 8| - 9$

$f(x) = |x| - 9$; $g(x) = 4x + 8$

25 $h(x) = [\![-3(x - 9)]\!]$

$f(x) = [\![-3x]\!]$; $g(x) = x - 9$

26 $h(x) = \sqrt{\frac{5 - x}{x + 2}}$

$f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = \frac{5 - x}{x + 2}$

27 $h(x) = (\sqrt{x} + 4)^3$

$f(x) = x^3$; $g(x) = \sqrt{x} + 4$

28 $h(x) = \frac{8}{(x - 5)^2}$

$f(x) = \frac{8}{x^2}$; $g(x) = x - 5$

29 $h(x) = \frac{\sqrt{4 + x}}{x - 2}$

$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x - 6}$; $g(x) = x + 4$

الحل

30 **ميكانيكا الكم:** يُعطى طول الموجة λ لجسم كتلته m kg، ويتحرك بسرعة v متر في الثانية بالدالة $\lambda = \frac{h}{mv}$، حيث h ثابت يساوي $6.626 \cdot 10^{-34}$.

a) أوجد دالة تمثّل طول الموجة لجسم كتلته 25 kg بدلالة سرعته.

$$f(v) = \frac{h}{25v}$$

b) هل توجد قيود على مجال الدالة؟ برر إجابتك.

قيمة v ليست صفراً. وإذا كانت كذلك, فلا يوجد طول موجه.

c) إذا تحرك الجسم بسرعة 8 أمتار في الثانية، فأوجد طول الموجة بدلالة h.

$$\lambda = \frac{h}{(25)(8)}$$

d) اكتب الدالة في الفقرة a على صورة تركيب دالتين.

$$f(v) = a[b(v)] = \frac{h}{25v} \quad , \quad b(v) = 25v \quad , \quad a(v) = \frac{h}{v}$$

للحل

31 **وظائف:** يعمل شخص في قسم المبيعات في إحدى الشركات ويتقاضى راتبًا وعمولة سنوية مقدارها 4% من المبيعات التي تزيد قيمتها على 300000 ريال. افرض أن $f(x) = x - 300000$ ، $h(x) = 0.04x$. (مثال 5)

a) إذا كانت قيمة المبيعات (x) تزيد على 300000 ريال، فهل تُمثّل العمولة بالدالة $f[h(x)]$ أم بالدالة $h[f(x)]$؟ برر إجابتك.

$h[f(x)]$؛ تحسب العمولة بعد طرح الحد الأدنى المطلوب من المبيعات الفعلية.

b) أوجد قيمة العمولة التي يتقاضاها الشخص، إذا كانت مبيعاته 450000 ريال في تلك السنة.

6000 ريال

للحل

أوجد دالتين f, g لكلٍّ مما يأتي بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$، على ألا تكون أي من الدالتين الدالة المحايدة $I(x) = x$.

32 $h(x) = \sqrt{x-1} - \frac{4}{x}$

; $g(x) = \sqrt{x-1}$

$f(x) = x - \frac{4}{x^2+1}$

33 $h(x) = \sqrt{-7x} + 9x$

; $g(x) = -7x$

$f(x) = \sqrt{x} - \frac{9x}{7}$

34 $h(x) = \frac{x}{2x-1} + \sqrt{\frac{4}{x}}$

; $g(x) = x + 4$

$f(x) = \frac{x-4}{2x-9} + \sqrt{\frac{4}{x-4}}$

35 $h(x) = \frac{x^2-4}{x} + \frac{3x-5}{5x}$

; $g(x) = x + 2$

$f(x) = \frac{x^2-4x}{x-2} + \frac{3x-11}{5x-10}$

للحل

أوجد $f(x+1)$ ، $f(-6)$ ، $f(0.5)$ في كلٍّ مما يأتي مقربًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم ذلك:

36 $f(x)-g(x)=x^2+x-6, g(x)=x+4$

$f(0.5)=$	-0.75
$f(-6)=$	22
$f(x+1)=$	x^2+4x+1

37 $f(x)+g(x)=\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{3}, g(x)=2x$

$f(0.5)=$	8.7
$f(-6)=$	11.6
$f(x+1)=$	$\frac{2}{x^2+2x+1}+\frac{1}{x+1}-2x-\frac{7}{3}$

38 $g(x)=f(x)-18x^2+\frac{\sqrt{2}}{x}, g(x)=\sqrt{1-x}$

$f(0.5)=$	2.4
$f(-6)=$	650.9
$f(x+1)=$	$\sqrt{-x}+18x^2+36x+18-\frac{\sqrt{2}}{x+1}$

للحل

أوجد $[f \circ g \circ h](x)$ لكل مما يأتي:

39

$f(x) = x + 8$

$g(x) = x^2 - 6$

$h(x) = \sqrt{x} + 3$

$[f \circ g \circ h](x) = x + 6\sqrt{x} + 11$

40

$f(x) = \sqrt{x + 5}$

$g(x) = x^2 - 3$

$h(x) = \frac{1}{x}$

$[f \circ g \circ h](x) = \sqrt{\frac{1}{x^2} + 2}$

41

إذا كانت $f(x) = x + 2$ ، فأوجد $g(x)$ في كل حالة مما يأتي:

(a $(f + g)(x) = x^2 + x + 6$

$g(x) = x^2 + 4$

(b $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{4}$

$g(x) = 4x + 8$

للحل

42 إذا كانت $f(x) = \sqrt{4x}$ ، فأوجد $g(x)$ في كلّ حالة مما يأتي:

a $[f \circ g](x) = |6x|$

$g(x) = 9x^2$

b $[g \circ f](x) = 200x + 25$

$g(x) = 50x^2 + 25$

43 إذا كان $f(x) = 4x^2$ ، فأوجد $g(x)$ في كلّ حالة مما يأتي:

a $[f \cdot g](x) = x$

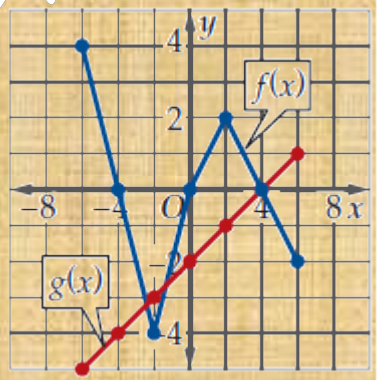
$g(x) = \frac{1}{4x}$

b $[f \cdot g](x) = 4x$

$g(x) = \frac{1}{x}$

للحل

باستعمال منحنيي الدالتين $g(x)$ ، $f(x)$ الممثلين في الشكل أدناه، أوجد:



44 $(f+g)(2)$

$= 1$

45 $(f-g)(-6)$

9

46 $(f \cdot g)(4)$

0

47 $\left(\frac{f}{g}\right)(-2)$

$\frac{4}{3}$

48 $(f \circ g)(-4)$

0

49 $(g \circ f)(6)$

-3

للحل

50 **كيمياء:** إذا كان $v(m)$ معدل سرعة جزيئات غاز عند درجة 30°C بالمتر لكل ثانية تُعطى بالدالة $v(m) = \sqrt{\frac{(24.9435)(303)}{m}}$، حيث m الكتلة المولية للغاز مقاسة بالكيلوجرام لكل مول.

a) هل توجد قيود على مجال الدالة؟فسر معناها.

$\{m \mid m > 0, m \in R\}$

b) أوجد معدل سرعة جزيئات الغاز إذا كانت كتلته المولية 145 كيلوجرامًا لكل مول عند درجة 30°C .

$$v(145) = \sqrt{\frac{(24.9435)(303)}{145}} = 7.22\ m/s$$

c) كيف يتغير معدل سرعة جزيئات غاز عندما تزداد كتلة الغاز المولية؟

تتناقص سرعتها.

d) اكتب الدالة على صورة تركيب دالتين.

$$v(m) = f(g(m))$$

$$g(m) = \frac{(24.9435)(303)}{145} \quad , f(m) = \sqrt{m}$$

للحل

أوجد ثلاث دوال f, g, h ، بحيث يكون $a(x) = [f \circ g \circ h](x)$ في كلٍّ مما يأتي :

51 $a(x) = (\sqrt{x-7} + 4)^2$

$f(x) = x^2$ ، $g(x) = \sqrt{x} + 4$ ،
$h(x) = x - 7$

52 $a(x) = \sqrt{(x-5)^2 + 8}$

$f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = x^2 + 8$ ،
$h(x) = x - 5$

53 $a(x) = \dfrac{3}{(x-3)^2 + 4}$

$f(x) = \dfrac{3}{x}$ ، $g(x) = x^2 + 4$ ،
$h(x) = x - 3$

54 $a(x) = \dfrac{4}{(\sqrt{x}+3)^2 + 1}$

$f(x) = \dfrac{4}{x+1}$ ، $g(x) = x^2$ ،
$h(x) = \sqrt{x} + 3$

الحل

أوجد $f \circ g, g \circ f$ لكل زوج من الدوال الآتية، وحدّد أية قيود على مجال دالة التركيب في كل حالة:

55

$f(x) = x^2 - 6x + 5$

$g(x) = \sqrt{x+4} + 3$

$\{x \mid x \geq -4, x \in R\}$,

$[f \circ g](x) = [g \circ f] = x$

56

$f(x) = \sqrt{x+6}$

$g(x) = \sqrt{16 + x^2}$

57

$f(x) = \sqrt{x}$

$g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

58

$f(x) = \frac{6}{2x+1}$

$g(x) = \frac{4}{4-x}$

59 تمثيلات متعددة: في هذه المسألة سوف تستقصي الدالة العكسية.

$f(x)$	$g(x)$
$x+3$	$x-3$
$4x$	$\frac{x}{4}$
x^3	$\sqrt[3]{x}$

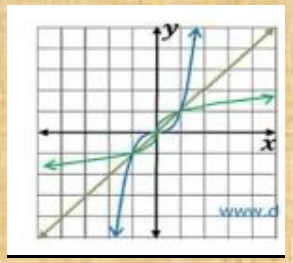
a) جبريًا: أوجد $f \circ g$ لكل زوج من الدوال في الجدول المجاور.

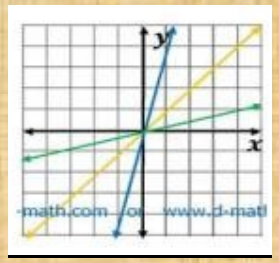
لكل دالة منها $[f \circ g](x) = x$

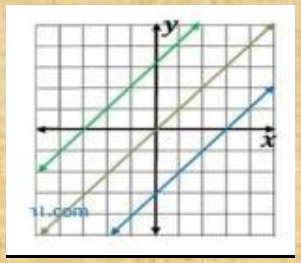
b) لفظيًا: صف العلاقة بين تركيب كل زوج من الدوال.

لكل زوج من الدوال تختصر الأعداد بعضها مع بعض على ألا يكون للتركيب أية معاملات غير الواحد ولا يبقى توابث .

c) بيانيًا: مثّل كل زوج من الدوال في المستوى الإحداثي نفسه، ثم ارسم خط الانعكاس بإيجاد منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقاط المتناظرة.







d) لفظيًا: خمّن معادلة خط الانعكاس. محور الانعكاس بين كل زوج من الدوال هو المستقيم $y=x$.

e) تحليليًا: ما الدالة الرئيسة (الأم) التي تساوي كل من $[g \circ f](x), [f \circ g](x)$؟ الدالة المحايدة .

f) تحليليًا: أوجد $g(x)$ بحيث يكون $[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$ في كلٍّ مما يأتي.

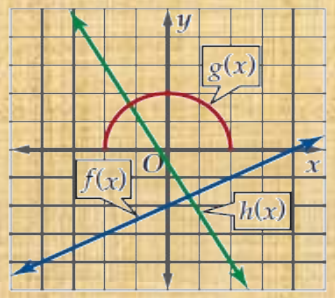
a) $f(x) = x - 6$ $g(x) = x + 6$

b) $f(x) = \frac{x}{3}$ $g(x) = 3x$

c) $f(x) = x^5$ $g(x) = \sqrt[5]{x}$

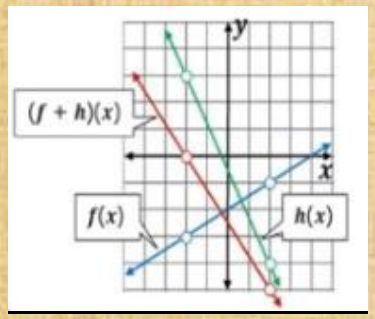
d) $f(x) = 2x - 3$ $g(x) = \frac{x+3}{2}$

للحل

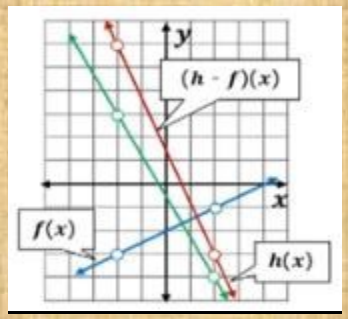


مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الشكل المجاور. ففي السؤال 60 مثّل الدوال f, h, $f+h$ في المستوى الإحداثي نفسه، وهكذا في الأسئلة 61-63:

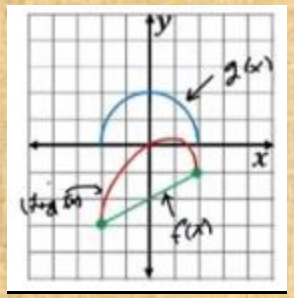
60 $(f+h)(x)$



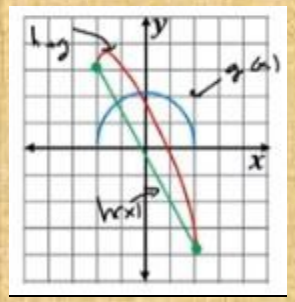
61 $(h-f)(x)$



62 $(f+g)(x)$

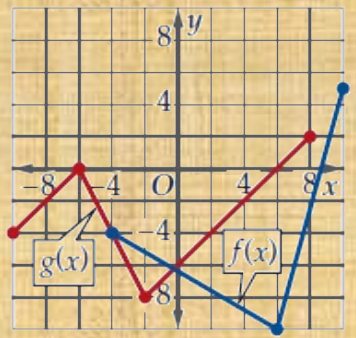


63 $(h+g)(x)$



للحل

حدّد مجال كل من دالتي التركيب الآتيتين، باستعمال الشكل الآتي:



64 $(f \circ g)(x)$

$\{x \mid -10 \le x \le -4 \text{ أو } 2 \le x \le 8 \ , x \in R\}$

65 $(g \circ f)(x)$

$\{x \mid -4 \le x \le 10 \ , x \in R\}$

العلاقات والدوال العكسية

1-7

تدرب وحل المسائل

الحل

مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم طبق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة، أم لا. (مثال 1)

1) $y = x^2 + 6x + 9$

لا يوجد دالة عكسية

2) $y = x^2 - 16x + 64$

لا يوجد دالة عكسية

عودة لفهرس الفصل (1)

للحل

3 $y = 3x - 8$

يوجد دالة عكسية

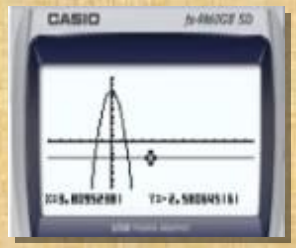
4 $y = 4$

لا يوجد دالة عكسية

5 $y = \sqrt{x+4}$

يوجد دالة عكسية

6 $y = -4x^2 + 8$



لا يوجد دالة عكسية

7 $y = \frac{8}{x+2}$

يوجد دالة عكسية

8 $y = \frac{1}{4}x^3$

يوجد دالة عكسية

للحل

أوجد الدالة العكسية f^{-1} في كلٍّ مما يأتي إن أمكن، وحدد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب غير موجودة. (مثال 2)

9 $g(x) = -3x^4 + 6x^2 - x$

غير موجودة

10 $f(x) = 4x^5 - 8x^4$

غير موجودة

11 $f(x) = \sqrt{x+8}$

$f^{-1}(x) = x^2 - 8, \ x \geq 0$

12 $f(x) = \sqrt{6 - x^2}$

غير موجودة

13 $f(x) = |x - 6|$

غير موجودة

14 $g(x) = \frac{x-6}{x}$

$g^{-1}(x) = \frac{6}{1-x}, \ x \neq 1$

15 $f(x) = \frac{6}{\sqrt{8-x}}$

$f^{-1}(x) = 8 - \frac{36}{x^2}, \ x > 0$

16 $g(x) = \frac{7}{\sqrt{x+3}}$

$g^{-1}(x) = -3 + \frac{49}{x^2}, \ x > 0$

17 $h(x) = \frac{x+4}{3x-5}$

$h^{-1}(x) = \frac{5x+4}{3x-1}, \ x \neq \frac{1}{3}$

18 $g(x) = |x + 1| + |x - 4|$

غير موجودة

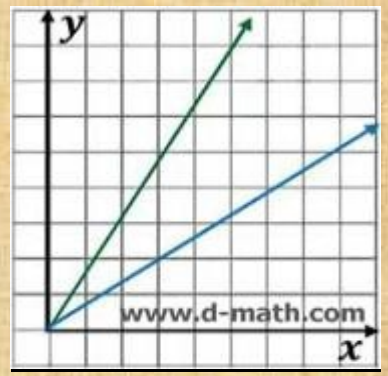
الحل

19 **سرعة:** تُعطى سرعة جسم y بالكيلومتر لكل ساعة بالدالة $y = 1.6x$ حيث x سرعة الجسم بالميل لكل ساعة. (مثال 2)

a) أوجد الدالة العكسية لِـ y، وماذا يمثّل كل متغير فيها؟

$y = \frac{x}{1.6}$ y السرعة بالميل لكل ساعة، x السرعة بالكيلو متر لكل ساعة.

b) مَثّل كلًّا من الدالتين في المستوى الإحداثي نفسه.



الحل

أثبت جبريًا أن كلًّا من الدالتين f و g تمثل دالة عكسية للأخرى في كل مما يأتي: (مثال 3)

20 $f(x) = 4x + 9$

$$g(x) = \frac{x-9}{4}$$

$$f(g(x)) = \frac{4(x-9)}{4} + 9 = x - 9 + 9 = x$$

$$g(f(x)) = \frac{4x+9-9}{4} = \frac{4x}{4} = x$$

21 $f(x) = -3x^2 + 5, x \geq 0$

$$g(x) = \sqrt{\frac{5-x}{3}}$$

$$f(g(x)) = -3\left(\sqrt{\frac{5-x}{3}}\right)^2 + 5 = \frac{-3(5-x)}{3} + 5 = x$$

$$g(f(x)) = \sqrt{\frac{5-(-3x^2+5)}{3}} = \sqrt{\frac{3x^2}{3}} = \sqrt{x^2} = x$$

22 $f(x) = \frac{x^2}{4} + 8, x \geq 0$

$$g(x) = \sqrt{4x - 32}$$

$$f(g(x)) = \frac{\sqrt{(4x-32)^2}}{4} + 8 = \frac{4x-32}{4} + 8 = x - 8 + 8 = x$$

$$g(f(x)) = \sqrt{4\left(\frac{x^2}{4} + 8\right) - 32} = \sqrt{x^2 + 32 - 32} = \sqrt{x^2} = x$$

23 $f(x) = (x+8)^{\frac{3}{2}}$

$$g(x) = x^{\frac{2}{3}} - 8, x \geq 0$$

$$f(g(x)) = \left(x^{\frac{2}{3}} - 8 + 8\right)^{\frac{3}{2}} = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = x$$

$$g(f(x)) = \left[(x+8)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{2}{3}} - 8 = x + 8 - 8 = x$$

للحل

24

$$f(x) = 2x^3 - 6$$

$$g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+6}{2}}$$

$$f(g(x)) = 2\left(\sqrt[3]{\frac{x+6}{2}}\right)^3 - 6 = \frac{2(x+6)}{2} - 6 = x + 6 - 6 = x$$

$$g(f(x)) = \sqrt[3]{\frac{2x^3 - 6 + 6}{2}} = \sqrt[3]{\frac{2x^3}{2}} = \sqrt[3]{x^3} = x$$

25

$$f(x) = \frac{x-6}{x+2}$$

$$g(x) = \frac{2x+6}{1-x}$$

$$f(g(x)) = \frac{\frac{2x+6}{1-x} - 6}{\frac{2x+6}{1-x} + 2} = \frac{8x}{8} = x$$

$$g(f(x)) = \frac{\frac{2(x-6)}{x+2} + 6}{1 - \frac{x-6}{x+2}} = \frac{8x}{8} = x$$

للحل

26 **فيزياء:** تُعطى طاقة الحركة لجسم متحرك بالجول بالدالة $f(x) = 0.5mx^2$ حيث m كتلة الجسم بالكيلوجرام و x سرعة الجسم بالمتر لكل ثانية. (مثال 3)

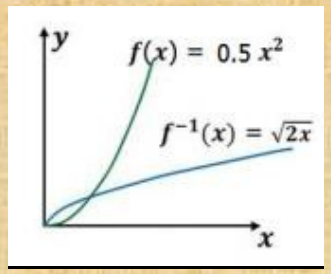
a) أوجد الدالة العكسية لـ $f(x)$. وماذا يعني كل متغير فيها؟

$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{2x}{m}}$ هي السرعة بالمتر/ثانية، x هي طاقة الحركة بالجول، m كتلة الجسم بالكيلوجرام.

b) أثبت أن كلًّا من الدالتين $f(x)$ والدالة التي حصلت عليها تمثل دالة عكسية للأخرى.

$$f[f^{-1}(x)] = f\left(\sqrt{\frac{2x}{m}}\right) = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{2x}{m}}\right)^2 = x$$

$$f^{-1}[f(x)] = g\left(\frac{1}{2}mx^2\right) = \left(\sqrt{\frac{2\left(\frac{1}{2}mx^2\right)}{m}}\right) = x$$

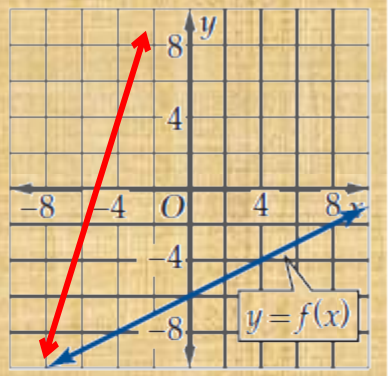


c) مَثِّل كلًّا من $f^{-1}(x)$ ، $f(x)$ على الشاشة نفسها من الحاسبة البيانية عندما تكون كتلة الجسم كيلو جرام واحد.

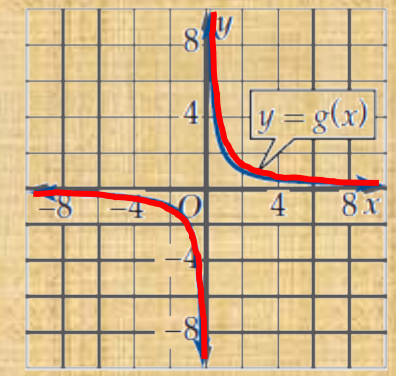
للحل

استعمل التمثيل البياني أدناه المعطى لكل دالة لتمثل الدالة العكسية لها: (مثال 4)

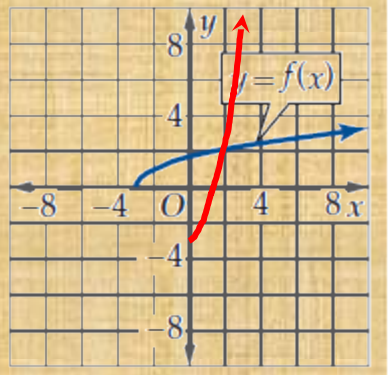
27



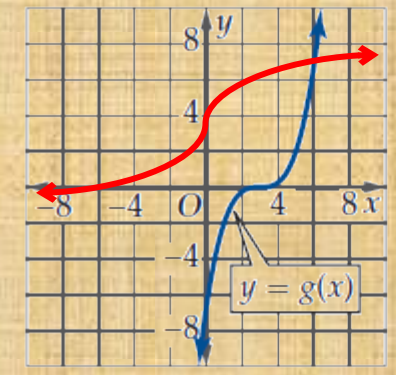
28



29



30



للحل

31 **وظائف:** يعمل فالح في أحد محلات بيع الأحذية خارج أوقات دوامه الرسمي مقابل راتب مقداره 420 ريالا في الأسبوع ويتقاضى أيضا عمولة مقدارها 5% من قيمة المبيعات.

أي أن ما يتقاضاه أسبوعيًا يُعطى بالدالة $f(x) = 420 + 0.05x$. (مثال 5)

a) أثبت أن الدالة $f^{-1}(x)$ موجودة، ثم أوجدها.

تحقق الدالة $f(x)$ اختبار الخط الأفقي،

$$f^{-1}(x)=20(x-420)$$

b) ماذا تمثّل كل من $f^{-1}(x)$, x في الدالة العكسية؟

تمثل x عمولة فالح خلال أسبوع، أما $f^{-1}(x)$ فتمثل مقدار مبيعات فالح.

c) حدد أية قيود على كل من مجال $f^{-1}(x)$, $f(x)$ إن وجدت. وبرر إجابتك.

$x \geq 0$ ، لأنه لا يمكن أن تكون مبيعات فالح بالسالب.

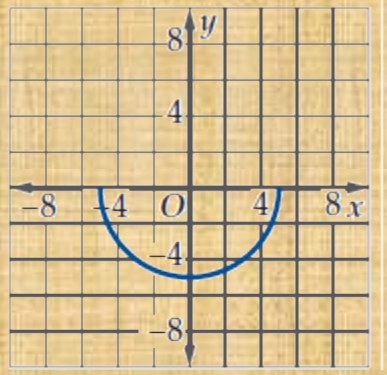
d) أوجد قيمة مبيعات فالح في الأسبوع الذي يتقاضى فيه 720 ريالًا.

6000ريال

للحل

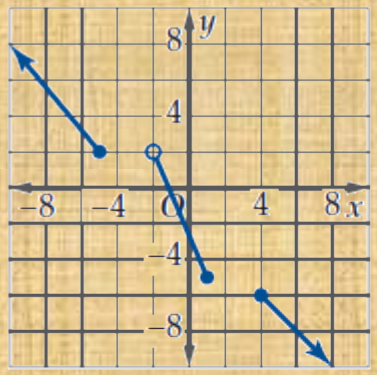
حدد إذا كانت الدالة العكسية موجودة في كلٍّ مما يأتي أم لا.

32



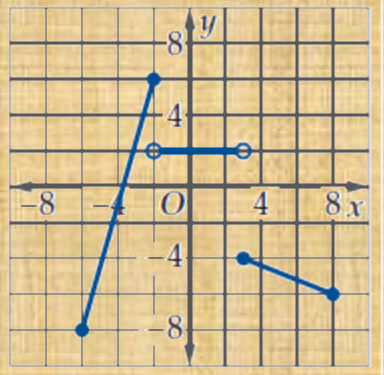
غير موجودة

33



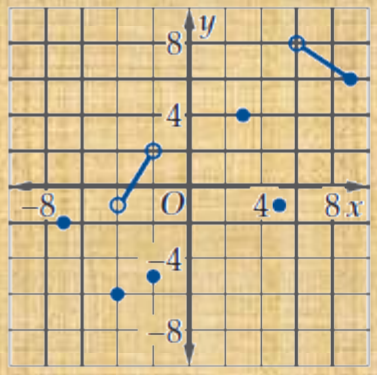
موجودة

34



غير موجودة

35



موجودة

الحل

كون جدولًا للدالة f^{-1} في كل مما يأتي إذا كانت موجودة، وإذا لم تكن موجودة، فاذكر السبب.

36

x	−6	−4	−1	3	6	10
$f(x)$	−4	0	3	5	9	13

f^{-1} موجود.

x	−4	0	3	5	9	13
$f^{-1}(x)$	−6	−4	−1	3	6	10

37

x	−3	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	14	11	8	10	11	16

f^{-1} غير موجود.

للحل

38 **درجات حرارة:** تُستعمل الدالة $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ للتحويل من درجات الحرارة السيليزية إلى درجات الحرارة الفهرنهايتية، وتُستعمل الدالة $k(x) = \frac{5}{9}(x + 459.67)$ للتحويل من درجات الحرارة الفهرنهايتية إلى درجات الحرارة المطلقة (كلفن).

a) أوجد f^{-1}، وماذا تمثّل هذه الدالة؟

$f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$، تمثل المعادلة المستعملة للتحويل من درجات الحرارة فهرنهايتية إلى درجات سيليزية.

b) أثبت أن كلاً من f, f^{-1} دالة عكسية للأخرى، ومثّل منحناهما على الشاشة نفسها في الحاسبة البيانية.

$$f^{-1}[f(x)] = \frac{5}{9}\left(\left(\frac{9}{5}x + 32\right) - 32\right) = \frac{5}{9}\left(\frac{9}{5}x\right) = x$$

$$f[f^{-1}(x)] = \frac{9}{5}\left(\frac{5}{9}(x - 32)\right) + 32 = x - 32 + 32 = x$$

c) أوجد $(k \circ f)(x)$، وماذا تمثّل هذه الدالة؟

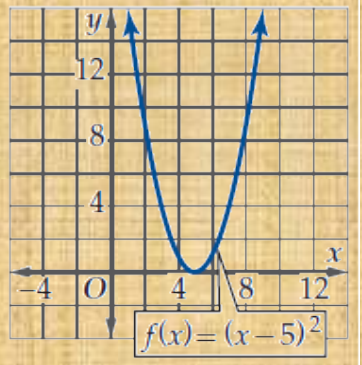
$k[f(x)] = x + 273.13$: تمثل المعادلة المستعملة للتحويل من درجات سيليزية إلى درجات مطلقة (كلفن).

d) إذا كانت درجة الحرارة 60°C فأوجد درجة الحرارة المطلقة المقابلة لها. 333.15 درجة مطلقة

للحل

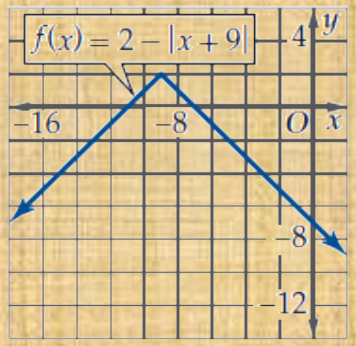
ضع قيودًا على مجال كل دالة من الدوال الآتية حتى تصبح دالة متباينة. ثم أوجد الدالة العكسية لها:

39



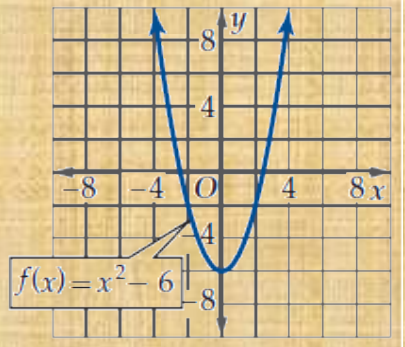
$x \geq 5 \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 5$

40



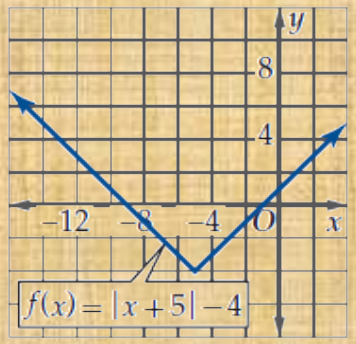
$x \leq -9 \quad f^{-1}(x) = x - 11$

41



$x \geq 0 \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x+6}$

42



$x \geq -5 \quad f^{-1}(x) = x - 1$

للحل

43 **أزهار:** تحتاج فاطمة إلى 75 زهرة لتزيين قاعة في إحدى المناسبات، فإذا كان بإمكانها شراء قرنفل بسعر 3 ريالات للزهرة الواحدة وشراء جوري بسعر 5 ريال للزهرة الواحدة. فأجب عما يأتي:

a) اكتب دالة تمثّل التكلفة الكلية لشراء الأزهار.

افترض أن x تمثل عدد أزهار الجوري

$$f(x) = 5x + 3(75 - x)$$

b) أوجد الدالة العكسية لدالة التكلفة. وماذا يمثّل كل متغير فيها ؟

$$f^{-1}(x) = 0.5x - 112.5$$

c) حدّد مجال دالة التكلفة، ومجال الدالة العكسية لها.

مجال $f(x)$: $\{x \mid 0 \le x \le 75 \, , \, x \in w\}$

مجال $f^{-1}(x)$: $\{x \mid 225 \le x \le 375 \, , \, x \in R\}$

d) إذا كانت التكلفة الكلية لشراء الأزهار 305 ريالات، فكم زهرة من القرنفل اشترت؟

35

للحل

إذا كانت الدالة f^{-1} موجودة، فاكتب المجال والمدى لكل من f, f^{-1}:

44 $f(x) = \sqrt{x-6}$

الدالة f ، المجال: $\{x \mid x \geq 6, x \in R\}$
المدى: $\{y \mid y \geq 0, y \in R\}$

الدالة f^{-1} ، المجال: $\{x \mid x \geq 0, x \in R\}$
المدى: $\{y \mid y \geq 6, y \in R\}$

45 $f(x) = x^2 + 9$

f^{-1} غير موجودة

46 $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-4}$

الدالة f ، المجال: $\{x \mid x \neq 4, x \in R\}$
المدى: $\{y \mid y \neq 3, y \in R\}$

الدالة f^{-1} ، المجال: $\{x \mid x \neq 3, x \in R\}$
المدى: $\{y \mid y \neq 4, y \in R\}$

47 $f(x) = \dfrac{8x+3}{2x-6}$

الدالة f ، المجال: $\{x \mid x \neq 3, x \in R\}$
المدى: $\{y \mid y \neq 4, y \in R\}$

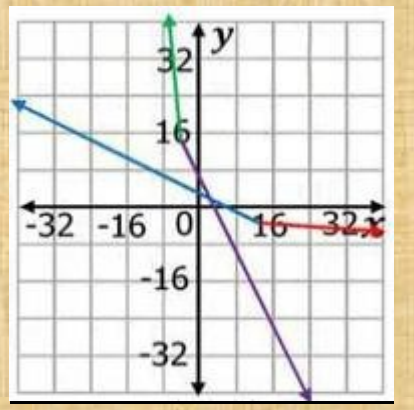
الدالة f^{-1} ، المجال: $\{x \mid x \neq 4, x \in R\}$
المدى: $\{y \mid y \neq 3, y \in R\}$

الحل

أوجد الدالة العكسية في كلٍّ مما يأتي، إن أمكن، ثم مثّل f , f^{-1} في مستوى إحداثي واحد.
و اذكر أية قيود على المجال:

48 $f(x)=\begin{cases} x^2 & , \quad -4 \geq x \\ -2x+5 & , \quad -4 < x \end{cases}$

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} -\sqrt{x} & , \quad 16 \leq x \\ 2.5-0.5x & , \quad 13 > x \end{cases}$$



49 $f(x)=\begin{cases} -4x+6 & , \quad -5 \geq x \\ 2x-8 & , \quad -5 < x \end{cases}$

$f^{-1}(x)$ غير موجودة

للحل

50 **اتصالات:** أعلنت شركة لبيع أجهزة الهاتف المحمول عن عرض مبين في الشكل أدناه. إذا كانت الشركة تخصم 50 ريالًا وتمنح تخفيضًا مقداره 10% من سعر الجهاز الأصلي.

a) اكتب دالة r لسعر الجهاز بدلالة سعره الأصلي إذا تم خصم ألـ 50 ريالًا فقط.

$$r(x) = x - 50$$

b) اكتب دالة d لسعر الجهاز بدلالة سعره الأصلي إذا تم منح التخفيض (10%) فقط.

$$d(x) = 0.9x$$

c) اكتب قاعدة تمثّل $T = r \circ d$ إذا تم التخفيض ثم الخصم.

$$T(x) = 0.9x - 50$$

d) أوجد T^{-1}، وماذا تمثّل؟

$T^{-1}(x) = \frac{x + 50}{0.9}$، تمثل الدالة العكسية السعر الأصلي للجهاز كدالة في سعر الجهاز بعد الخصم وإجراء التخفيض.

e) إذا كانت التكلفة الكلية لشراء جهاز بعد التخفيض ثم الخصم 760 ريالًا، فكم يكون سعره الأصلي؟

900 ريال

للحل

إذا كانت $f(x)=8x-4, g(x)=2x+6$ فأوجد:

51 $\left(f^{-1}\circ g^{-1}\right)(x)$

$(f^{-1}\circ g^{-1})(x)=\frac{x+2}{16}$

52 $\left(g^{-1}\circ f^{-1}\right)(x)$

$(g^{-1}\circ f^{-1})(x)=\frac{x-44}{16}$

53 $(f\circ g)^{-1}(x)$

$(f\circ g)^{-1}(x)=\frac{x-44}{16}$

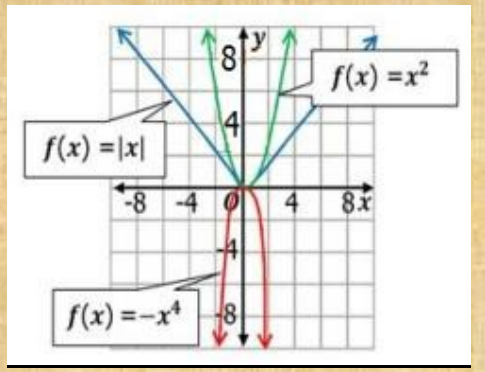
54 $(g\circ f)^{-1}(x)$

$(g\circ f)^{-1}(x)=\frac{x+2}{16}$

للحل

55 **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة معكوس كل من الدالة الزوجية والدالة الفردية.

a) **بيانيًا:** مثل بيانيًا منحنيات ثلاث دوال زوجية مختلفة. هل تحقق هذه الدوال اختبار الخط الأفقي؟



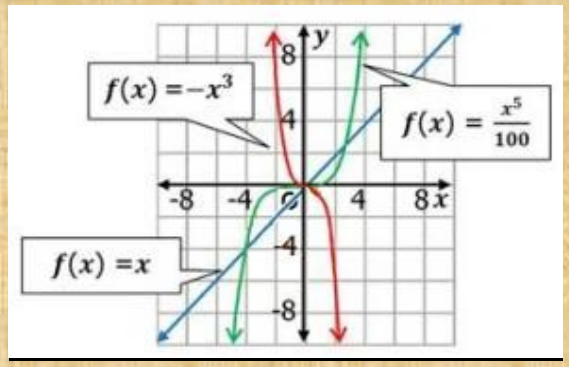
لا تحقق هذه الدوال اختبار الخط الأفقي.

b) **تحليليًا:** كون تخمينًا حول وجود أو عدم وجود معكوس للدالة الزوجية. أثبت صحة تخمينك بالطريقة الجبرية أو انفِه.

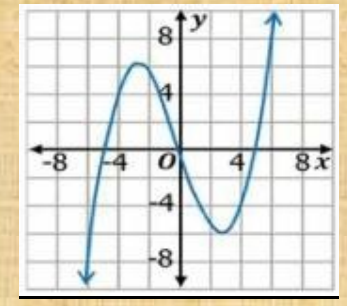
يمكن التوصل إلى قاعدة تقول إن الدوال الزوجية ليس لها دوال عكسية.
إذا كانت الدالة زوجية فإن $f(x) = f(-x)$ وعليه فإن قيمتين من x ترتبطان بقيمة واحدة من y؛ مما يؤدي إلى أن الدالة لا تحقق اختبار الخط الأفقي، أي أنه لا يوجد للدالة الزوجية دالة عكسية

للحل

c) **بيانيًا:** مثل بيانيًا منحنيات ثلاث دوال فردية مختلفة. هل تحقق هذه الدوال اختبار الخط الأفقي؟



d) **تحليليًا:** كون تخمينًا حول وجود أو عدم وجود معكوس للدالة الفردية. أثبت صحة تخمينك بالطريقة الجبرية أو انفِه.



يوضح الرسم أن للدوال الثلاث دوال عكسية، ولكن هذا لا ينطبق على كل الدوال الفردية، فمثلًا الدالة

$$f(x) = \frac{2}{15}x^3 - \frac{47}{15}x$$

فردية؛ لأن $f(-x) = -f(x)$. منحنى هذه الدالة لا يحقق اختبار الخط الأفقي، أي أنه لا يوجد دالة عكسية لـ f

الفصل (2)
العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

2-1

2-2

2-3

2-4

2-5

2-6

عودة لفهرس تدرب

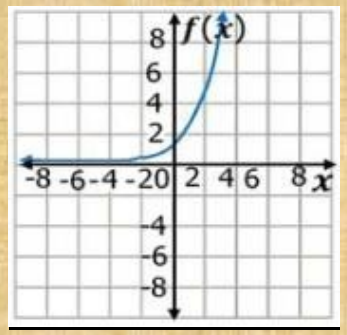
2-1 تمثيل الدوال الأسية بيانياً

تدرب وحل المسائل

الحل

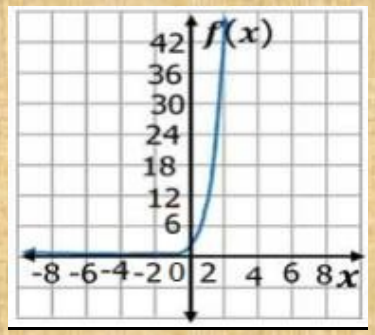
مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدّد مجالها، ومداها: (المثالان 1, 2)

1 $f(x) = 2^x$



المجال = { جميع الأعداد الحقيقية}
المدى = $\{f(x) \mid f(x) > 0\}$

2 $f(x) = 5^x$



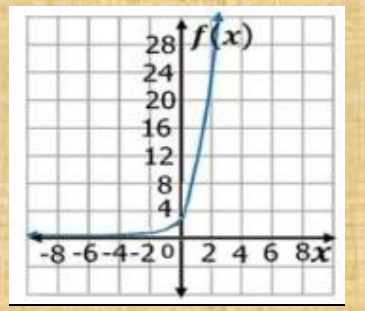
المجال = { جميع الأعداد الحقيقية}
المدى = $\{f(x) \mid f(x) > 0\}$

عودة لفهرس الفصل (2)

الحل

3

$f(x) = 2(3)^x$

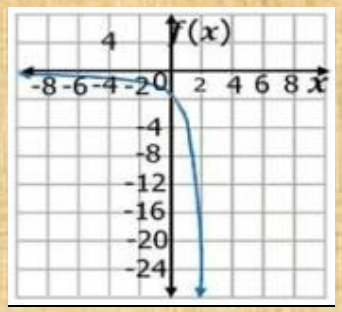


المجال = { جميع الأعداد الحقيقية }

المدى = $\{ f(x) \mid f(x) > 0 \}$

4

$f(x) = -2(4)^x$

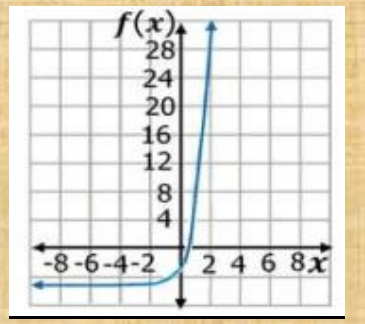


المجال = { جميع الأعداد الحقيقية }

المدى = $\{ f(x) \mid f(x) < 0 \}$

5

$f(x) = 4^{x+1} - 5$

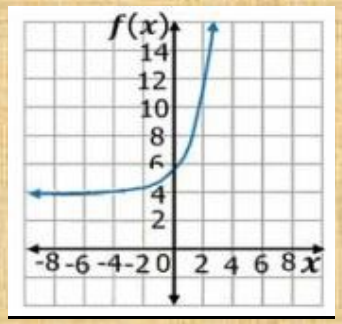


المجال = { جميع الأعداد الحقيقية }

المدى = $\{ f(x) \mid f(x) > -5 \}$

6

$f(x) = 3^{2x} + 1$



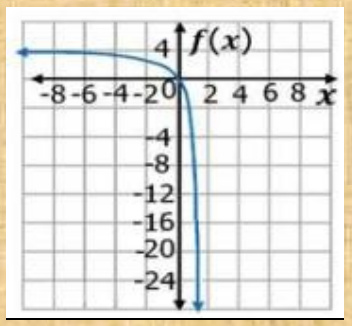
المجال = { جميع الأعداد الحقيقية }

المدى = $\{ f(x) \mid f(x) > 1 \}$

للحل

7

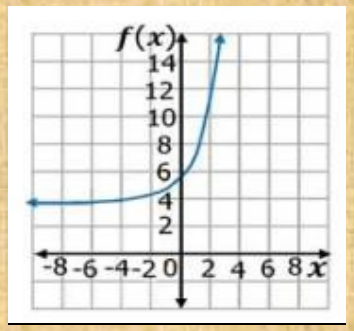
$f(x) = 3^{x-2} + 4$



المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}
المدى = $\{f(x) \mid f(x) < 4\}$

8

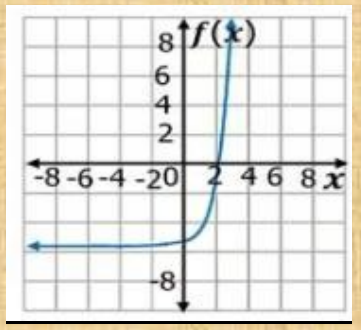
$f(x) = 2^{x+1} + 3$



المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}
المدى = $\{f(x) \mid f(x) > 3\}$

9

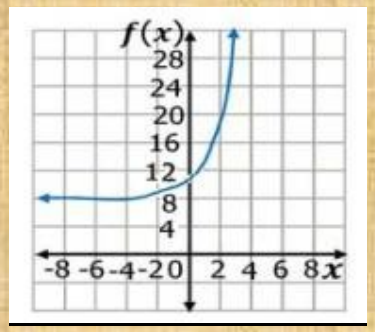
$f(x) = 0.25(4)^x - 6$



المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}
المدى = $\{f(x) \mid f(x) > -6\}$

10

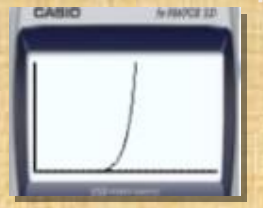
$f(x) = 3(2)^x + 8$



المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}
المدى = $\{f(x) \mid f(x) > 8\}$

للحل

11 **حاسوب:** يزداد انتشار فيروس في شبكة حاسوبية بمعدل 25% كل دقيقة. إذا دخل الفيروس إلى جهاز واحد عند البداية، فأوجد دالة أسية تمثل انتشار الفيروس منذ البداية، ومثلها بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم قدر انتشاره بعد الساعة الأولى. (مثال 3)

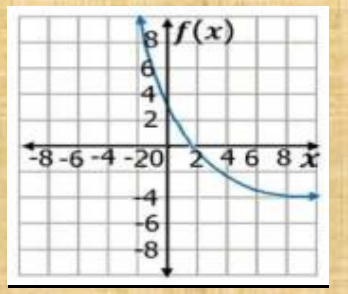


$$y = (1.25)^t$$

بعد الساعة الأولى يكون الفيروس انتشر في 652530 حاسوب تقريباً.

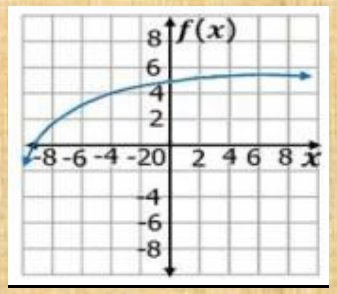
مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدد مجالها، ومداها: (مثال 4)

12 $f(x) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{x-3} - 4$



المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}
المدى = $\{f(x) \mid f(x) > -4\}$

13 $f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} + 5$

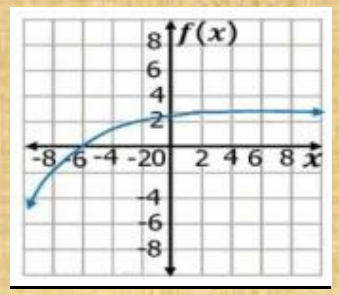


المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}
المدى = $\{f(x) \mid f(x) < 5\}$

للحل

14

$$f(x) = -\frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^{x-4} + 3$$

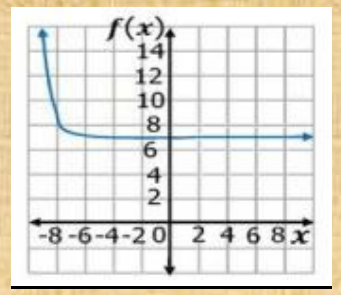


المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}

المدى = $\{f(x) \mid f(x) < 3\}$

15

$$f(x) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^{x+6} + 7$$

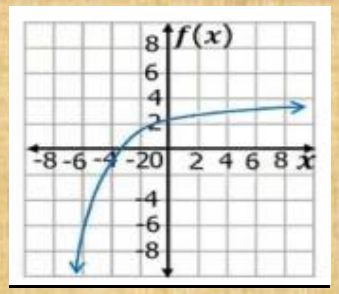


المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}

المدى = $\{f(x) \mid f(x) > 7\}$

16

$$f(x) = -4\left(\frac{3}{5}\right)^{x+4} + 3$$

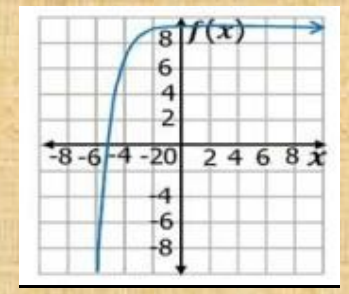


المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}

المدى = $\{f(x) \mid f(x) < 3\}$

17

$$f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}\right)^{x+2} + 9$$

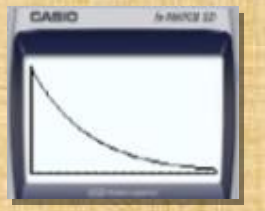


المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}

المدى = $\{f(x) \mid f(x) < 9\}$

للحل

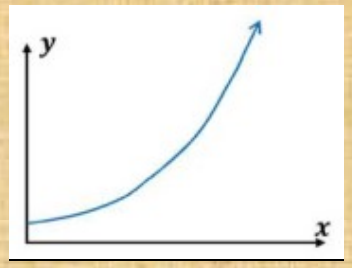
18 **سيارات:** يتناقص سعر سيارة جديدة بمعدل 15% كل سنة. أوجد دالة أسية تمثل سعر السيارة بعد t سنة من شرائها، ومثلها بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية. ثم قدر سعر السيارة بعد 20 سنة من شرائها. (مثال 5)



$y = 80000(0.85)^t$

بعد 20 سنة يكون ثمنها 3100 ريال تقريباً.

19 **علوم:** يتكاثر نحل في خلية فيزداد العدد بمعدل 30% كل أسبوع. إذا كان عدد النحل في البداية 65 نحلة فأوجد دالة أسية تمثل عدد النحل بعد t أسبوع، ومثلها بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم قدّر عدد النحل بعد 10 أسابيع.

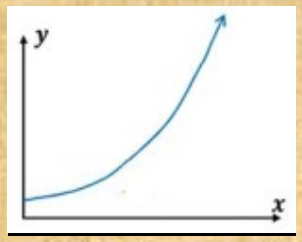


$y = 65(1.3)^t$

عدد النحل بعد 10 أسابيع 896 تقريباً.

للحل

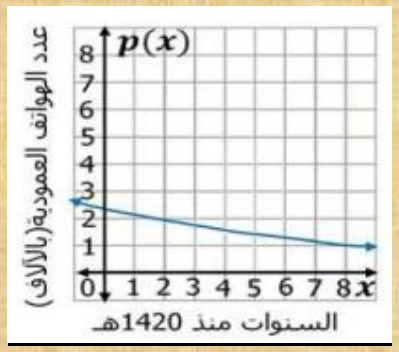
20 **كرة سلة :** تناقص عدد الحضور لمباريات فريق كرة قدم بمعدل 5% لكل مباراة بعد خسارته في أحد المواسم. أوجد دالة أسية تمثل عدد الحضور (y) في المباراة (t)، إذا كان عددهم في المباراة الأولى 23500، ومثلها بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم قدّر عدد الحضور في المباراة 15 .



$$y = 23500(0.95)^t$$

في المباراة 15 يكون الحضور 10887 تقريباً.

21 **هواتف:** تناقص عدد الهواتف العمومية في الآونة الأخيرة نتيجة انتشار الهواتف المحمولة. فإذا كان عدد الهواتف العمومية بالآلاف في إحدى المدن يعطى بالدالة $P(x) = (2.28)(0.9)^x$ في السنة x منذ عام 1420 هـ.



a) مثل الدالة بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية.

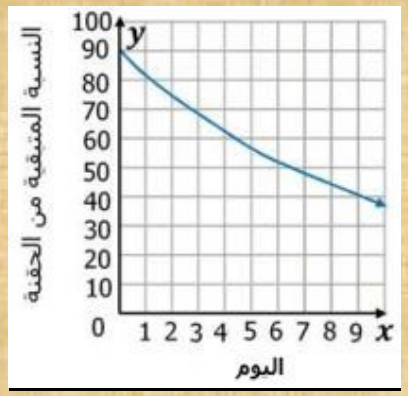
b) وضّح ماذا يمثل مقطع $P(x)$ وخط التقارب في هذه الحالة.

يمثل المقطع $P(x)$ عدد الهواتف العمومية عام 1420هـ، وخط التقارب هو المحور x وسيتناقص عدد الهواتف العمومية ليقترب من 0 ولن يصل إليه وذلك منطقي؛ لأنه ستكون هنالك حاجة دائماً للهواتف العمومية.

22 **صحة :** أخذ مريض حقنة، وفي كل يوم تلى ذلك، استهلك جسمه 10% مما تبقى من المادة المحقونة.

a) مثّل الدالة التي تعبّر عن هذا الموقف بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.

للحل



$y = 100(0.9)^t$

b) متى يكون في جسم المريض أقل من 50% من المادة المحقونة؟ بعد اليوم السادس

c) كم يبقى من المادة المحقونة في الجسم بعد 9 أيام؟ أقل بقليل من 40%

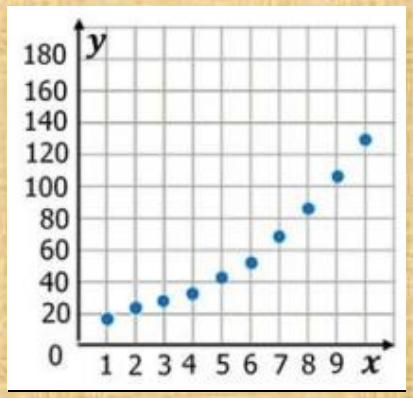
للحل

23 **نظرية الأعداد:** تتبع متتابعة عددية نمطًا معينًا حيث يساوي كل حد فيها 125% من الحد السابق له، فإذا كان الحد الأول يساوي 18 فأجب عما يأتي:

a) اكتب الدالة التي تمثل هذا الموقف.

$$y = 18(1.25)^{t-1}$$

b) مثّل الدالة لأول 10 حدود بيانيًّا.



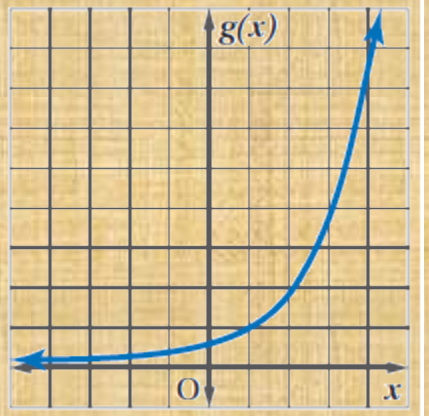
c) ما قيمة الحد العاشر؟ قرّب الناتج إلى أقرب عدد صحيح.

قيمة الحد العاشر 134

للحل

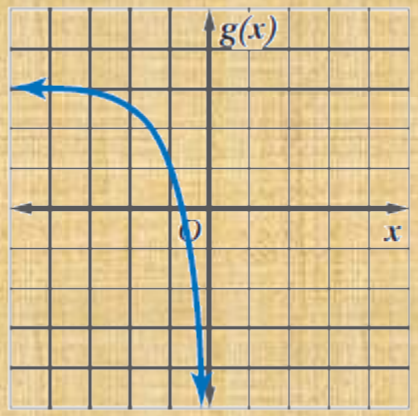
إذا كانت $f(x)$ هي الدالة الرئيسة (الأم) لكل دالة ممثلة بيانيًّا أدناه، والتمثيل البياني لـ $g(x)$ هو تحويل للتمثيل البياني لـ $f(x)$، فأوجد الدالة $g(x)$:

24



$f(x) = \frac{1}{2}(2)^x$

25



$f(x) = -2(4)^{x+1} + 3$

26 **تمثيلات متعددة:** ستستعمل لحل هذا التمرين جداول القيم أدناه للدوال الأسية $f(x), g(x), h(x)$.

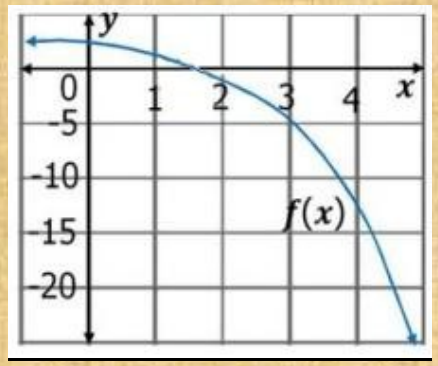
للحل

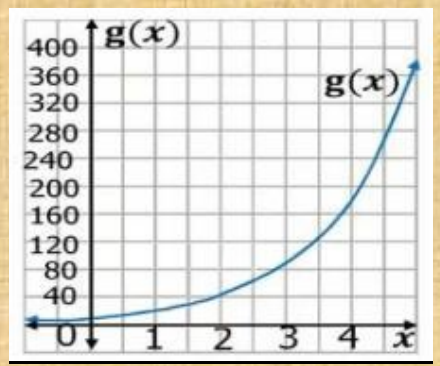
x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	2.5	2	1	-1	-5	-13	-29

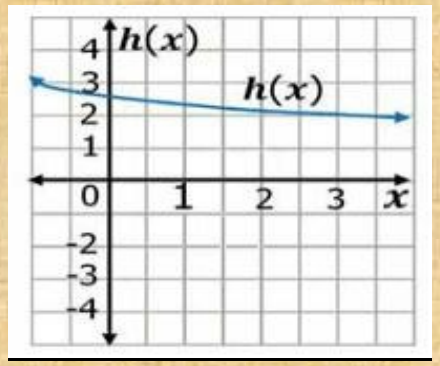
x	-1	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	5	11	23	47	95	191	383

x	-1	0	1	2	3	4	5
$h(x)$	3	2.5	2.25	2.125	2.0625	2.0313	2.0156

a) **بيانيًا:** مثّل كل دالة بيانيًّا في الفترة $-1 \le x \le 5$ على ورقة تمثيل بياني مستقلة.







للحل

b) **لفظيًا:** أي الدوال معاملها (a) سالب؟ وضِّح إجابتك .

$f(x)$: تمثيل الدالة $f(x)$ البياني هو انعكاس في المحور x وقيم المخرجات في الجدول سالبة.

c) **تحليليًا:** أي الدوال تمثل إزاحة للدالة الرئيسة (الأم) إلى اليسار؟

$h(x)$

d) **تحليليًا:** أي الدوال تمثل نموًا أسيًّا؟ وأيها تمثل اضمحلالًا أسيًّا؟

$f(x)$ و $g(x)$ دالتا نمو أسي ، على حين أن $h(x)$ دالة اضمحلال أسي؛ والقيم المطلقة للمخرجات متزايدة لدوال النمو الأسي ومتناقصة لدوال الاضمحلال.

حل المعادلات والمتباينات الأسية

2-2

تدرب وحل المسائل

للحل

حُلّ كل معادلة مما يأتي: (مثال 1)

1) $8^{4x+2} = 64$

$x = 0$

2) $5^{x-6} = 125$

$x = 9$

3) $3^{5x} = 27^{2x-4}$

$x = 12$

4) $16^{2y-3} = 4^{y+1}$

$x = \frac{7}{3}$

5) $2^{6x} = 32^{x-2}$

$x = -10$

6) $49^{x+5} = 7^{8x-6}$

$x = \frac{8}{3}$

عودة لفهرس الفصل (2)

للحل

7 $81^{a+2} = 3^{3a+1}$

$a = -7$

8 $256^{b+2} = 4^{2-2b}$

$b = -1$

9 $9^{3c+1} = 27^{3c-1}$

$b = \frac{5}{3}$

10 $8^{2y+4} = 16^{y+1}$

$y = -4$

11 **علوم:** الانقسام هو عملية حيوية يتم فيها انشطار الخلية إلى خليتين مطابقتين تمامًا للخلية الأصلية، وتنقسم إحدى أنواع الخلايا البكتيرية كل 15 دقيقة. (مثال 2)

a) اكتب دالة أسّية على الصورة $c = ab^t$ تمثل عدد الخلايا البكتيرية c المتكونة من انقسام خلية واحدة بعد t من الدقائق.

$c = 2^{\frac{t}{15}}$

b) إذا بدأت خلية بكتيرية واحدة بالانقسام، فكم خلية ستتكون بعد ساعة؟

$c = 2^{\frac{60}{15}} = 16$

للحل

12 **مال:** ورث خالد مبلغ 100000 ريال عن والده عام 1430 هـ، واستثمره في مشروع تجاري، وقدّر خالد أن المبلغ المستثمر سيصبح 169588 ريال بحلول عام 1442 هـ. (مثال 2)

a) اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ تمثل المبلغ y بدلالة عدد السنوات x منذ عام 1430 هـ.

$y = 100000(1.045)^x$

b) افرض أن المبلغ استمر في الزيادة بالمعدل نفسه، فكم سيصبح عام 1450 هـ إلى أقرب منزلتين عشريتين؟

$y = 100000(1.045)^{20}$

= 241171.40 ريال

13 استثمر حسن مبلغ 70000 ريال متوقعًا ربحًا سنويًا نسبته 4.3%، بحيث تُضاف الأرباح إلى رأس المال كل شهر. كم المبلغ الكلي المتوقع بعد 7 سنوات إلى أقرب منزلتين عشريتين. (مثال 3)

= 94533.78 ريال تقريباً

للحل

14 استثمر ماجد مبلغ 50000 ريال متوقعًا ربحًا سنويًا نسبته 2.25%، بحيث تُضاف الأرباح إلى رأس المال مرتين شهريًا. كم المبلغ الكلي المتوقع بعد 6 سنوات إلى أقرب منزلتين عشريتين؟ (مثال 3)

= 57223.22 ريال تقريباً

حل كل متباينة مما يأتي: (مثال 4)

15 $4^{2x+6} \leq 64^{2x-4}$

$x \geq 4.5$

16 $25^{y-3} \leq \left(\frac{1}{125}\right)^{y+3}$

$y \leq -0.6$

17 $625 \geq 5^{a+8}$

$a \leq -4$

18 $10^{5b+2} > 1000$

$b > 0.2$

19 $\left(\frac{1}{64}\right)^{c-2} < 32^{2c}$

$c > 0.75$

20 $\left(\frac{1}{9}\right)^{3t+5} \geq \left(\frac{1}{243}\right)^{t-6}$

$t \leq -40$

للحل

اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ للتمثيل البياني المار بكل زوج من النقاط فيما يأتي:

21 $(3, 100)$, $(0, 6.4)$

$y = 6.4(2.5)^x$

22 $(4, 81)$, $(0, 256)$

$y = 256(0.75)^x$

23 $(5, 371293)$, $(0, 128)$

$y = 128(4.926)^x$

24 $(4, 21609)$, $(0, 144)$

$y = 144(3.5)^x$

25 **علوم:** وُضع كوب من الشاي درجة حرارته 90°C في وسط درجة حرارته ثابتة وتساوي 20°C فتناقصت درجة حرارة الشاي، ويمكن تمثيل درجة حرارة الشاي بعد t دقيقة بالدالة $y(t) = 20 + 70(1.071)^{-t}$.

a) أوجد درجة حرارة الشاي بعد 15 دقيقة. $45.02°C$ تقريباً

b) أوجد درجة حرارة الشاي بعد 30 دقيقة. $28.94°C$ تقريباً

c) إذا كانت درجة الحرارة المناسبة لشرب الشاي هي 60°C ، فهل ستكون درجة حرارة الشاي مساويةً لها أم أقل منها بعد 10 دقائق؟ أقل منها.

للحل

26 **أشجار:** يتناسب قطر قاعدة جذع شجرة بالسنتمترات طرديًا مع ارتفاعها بالأمتار مرفوعًا للأس $\frac{3}{2}$ ، إذا بلغ ارتفاع شجرة 6 m ، وقطر قاعدة جذعها 19.1 cm .

اكتب معادلة القطر d لقاعدة جذع الشجرة إذا كان ارتفاعها h متر .

$$d = 1.30h^{\frac{3}{2}}$$

حُلّ كل معادلة أسية مما يأتي :

27 $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+1} = 8^{2x+1}$

$x = -\frac{2}{5}$

28 $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-5} = 25^{3x+2}$

$x = \frac{1}{7}$

29 $216 = \left(\frac{1}{6}\right)^{x+3}$

$x = -6$

30 $\left(\frac{1}{8}\right)^{3x+4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2x+4}$

$x = -\frac{4}{13}$

31 $\left(\frac{2}{3}\right)^{5x+1} = \left(\frac{27}{8}\right)^{x-4}$

$x = \frac{11}{8}$

32 $\left(\frac{25}{81}\right)^{2x+1} = \left(\frac{729}{125}\right)^{-3x+1}$

$x = 1$

للحل

33 **سكان:** بلغ عدد سكان العالم عام 1950م، 2.556 مليار نسمة، وبحلول عام 1980م أصبح 4.458 مليارات نسمة.

a) اكتب دالة أسية على صورة $y = ab^x$ يمكن أن تمثل تزايد عدد سكان العالم من عام 1950م إلى عام 1980م بالمليار. اكتب المعادلة بدلالة x، حيث x عدد السنوات منذ عام 1950م (قرّب قيمة b إلى أقرب جزء من عشرة آلاف)

$$y = 2.556(1.0187)^x$$

b) افرض أن تزايد عدد السكان استمر بالمعدل نفسه، فقدّر عدد سكان العالم عام 2000 .

6.455 مليارات تقريبا

c) إذا كان عدد سكان العالم عام 2000م هو 6.08 مليارات نسمة تقريبًا، فقارن بين تقديرك والعدد الحقيقي للسكان.

التقدير أكبر من العدد الحقيقي للسكان بـ 375 مليون.

d) استعمل المعادلة التي توصلت إليها في فرع a لتقدير عدد سكان العالم عام 2020م. ما دقة تقديرك؟ وضح إجابتك.

9.3498 ملياراً تقريباً، وبما أن التنبؤ بعدد السكان عام 2000 كان أكبر من العدد الحقيقي، فقد يكون هذا التنبؤ أكبر مما سيكون عليه في الواقع في ذلك الوقت.

للحل

34

ثقافة مالية: يُفاضل سعيد بين خيارين للاستثمار طويل الأجل ويريد أن يختار أحدهما.

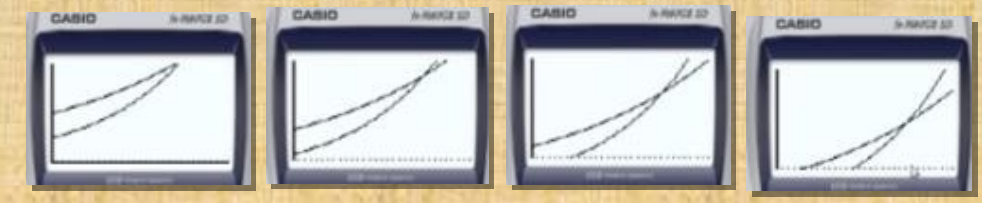
الخيار الأول:	الخيار الثاني:
يستثمر مبلغ 50000 ريال في مؤسسة يتوقع أن يكون معدل ربحها السنوي 6.5% ويتم إضافة الأرباح إلى رأس المال أربع مرات سنويًا.	يشارك في تجارة رأس مالها 50000 ريال يتوقع ان تكون نسبة ربحها 4.2% سنويًا ويتم إضافة الأرباح إلى رأس المال كل شهر. بالإضافة إلى استثمار مبلغ 50000 ريال في مشروع يُقدر نسبة ربحه السنوي 2.3% ويتم إضافة الأرباح إلى رأس المال كل أسبوع.

a) اكتب معادلة كل من الخيار الأول والخيار الثاني للاستثمار.

$$A = 50000\left(1 + \frac{0.065}{4}\right)^{4t}$$

b) مثّل بيانيًا منحنىً يوضح المبلغ الكلي من كل استثمار بعد t سنة.

$$A = 50000\left(\left(1 + \frac{0.042}{12}\right)^{12t} + \left(1 + \frac{0.023}{52}\right)^{52t}\right)$$



c) هل يمكن أن يتساوى المبلغ المتجمع من الاستثمار الأول مع المبلغ المتجمع من الاستثمار الثاني عند زمن ما؟

خلال أول 22 سنة يكون الخيار الثاني أفضل (لأنه أعلى من الخيار الأول)
وبعد 22 سنة يصبح الخيار الأول هو الأفضل لأن المبلغ المتجمع أكبر من الخيار الثاني

للحل

35

تمثيلات متعددة: ستستكشف في هذا التمرين الزيادة المتسارعة في الدوال الأسية. قص ورقة إلى نصفين، وضع بعضهما فوق بعض، ثم قصهما معًا إلى نصفين وضع بعضهما فوق بعض، وكرر هذه العملية عدة مرات.

a) **حسيًا:** عُدّ قطع الورق الناتجة بعد القص الأول، ثم بعد القص الثاني، والثالث، والرابع.

b) **جدوليًا:** دوِّن نتائجك في جدول.

c) **رمزيًا:** استعمل النمط في الجدول لكتابة معادلة تمثل عدد قطع الورق بعد القص x مرة.

d) **تحليليًا:** يُقدر سُمك الورقة الاعتيادية بنحو 0.003in ، اكتب معادلة تمثل سُمك رزمة الورق بعد قصها x مرة.

e) **تحليليًا:** ما سُمك رزمة من الورق بعد قصها 30 مرة؟

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

2-3

تدرب وحل المسائل

الحل

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية: (مثال 1)

1. $\log_8 512 = 3$
   $8^3 = 512$

2. $\log_5 625 = 4$
   $5^4 = 625$

3. $\log_2 16 = 4$
   $2^4 = 16$

4. $\log_7 343 = 3$
   $7^3 = 343$

5. $\log_9 \frac{1}{81} = -2$
   $9^{-2} = \frac{1}{81}$

6. $\log_3 \frac{1}{27} = -3$
   $3^{-3} = \frac{1}{27}$

7. $\log_{12} 144 = 2$
   $12^2 = 144$

8. $\log_9 1 = 0$
   $9^0 = 1$

عودة لفهرس الفصل (2)

للحل

اكتب كل معادلة أسية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية: (مثال 2)

9 $11^3 = 1331$

$\log_{11} 1331 = 3$

10 $16^{\frac{3}{4}} = 8$

$\log_{16} 8 = \frac{3}{4}$

11 $9^{-1} = \frac{1}{9}$

$\log_9 \frac{1}{9} = -1$

12 $6^{-3} = \frac{1}{216}$

$\log_6 \frac{1}{216} = -3$

13 $2^8 = 256$

$\log_2 256 = 8$

14 $4^6 = 4096$

$\log_4 4096 = 6$

15 $27^{\frac{2}{3}} = 9$

$\log_{27} 9 = \frac{2}{3}$

16 $25^{\frac{3}{2}} = 125$

$\log_{25} 125 = \frac{3}{2}$

للحل

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي: (المثالان 3,4)

17) $\log_{13} 169$

2

18) $\log_2 \frac{1}{128}$

-7

19) $\log_6 1$

0

20) $\log_4 1$

0

21) $\log_{10} 10$

1

22) $\log_{10} 0.01$

-2

23) $\log_3 \frac{1}{9}$

-2

24) $\log_4 \frac{1}{64}$

-3

25) $\log_6 216$

3

26) $\log_{27} 3$

$\frac{1}{3}$

27) $\log_{32} 2$

$\frac{1}{5}$

28) $\log_{121} 11$

$\frac{1}{2}$

29) $\log_{\frac{1}{5}} 3125$

-5

30) $\log_{\frac{1}{8}} 512$

-3

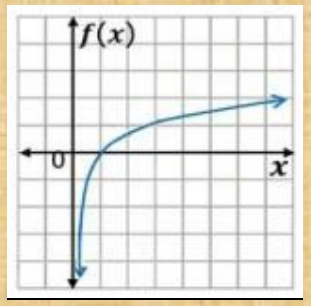
31) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{216}$

3

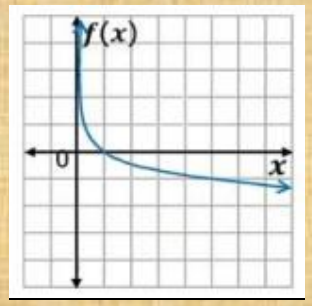
الحل

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: (المثالان 5, 6)

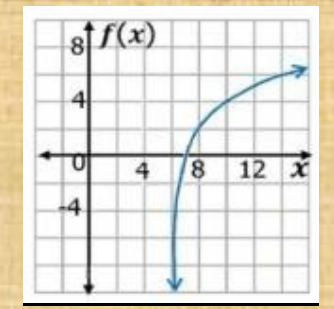
32 $f(x) = \log_3 x$



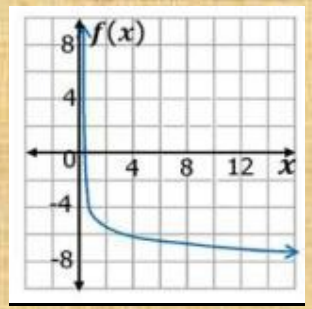
33 $f(x) = \log_{\frac{1}{6}} x$



34 $f(x) = 4 \log_4 (x - 6)$

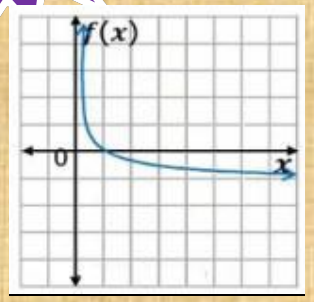


35 $f(x) = 2 \log_{\frac{1}{10}} x - 5$

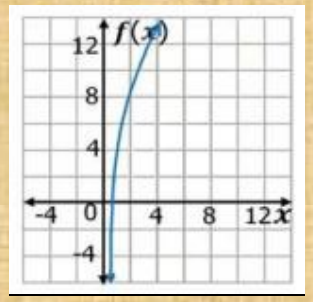


للحل

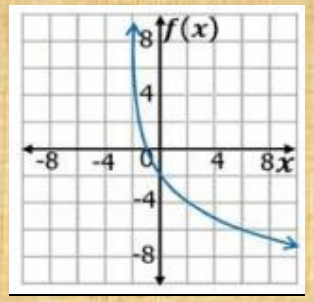
37 $f(x) = \log_{\frac{1}{9}} x$



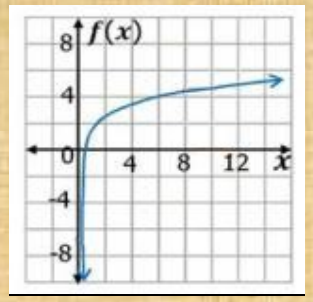
36 $f(x) = 4 \log_2 x + 6$



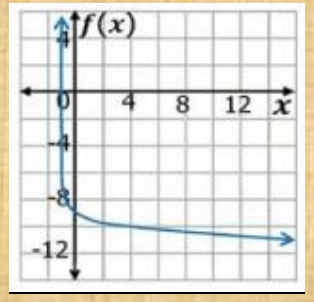
39 $f(x) = 6 \log_{\frac{1}{8}} (x + 2)$



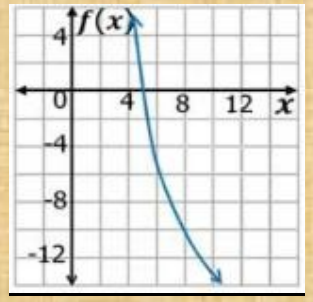
38 $f(x) = -3 \log_{\frac{1}{12}} x + 2$



41 $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} (x + 1) - 9$



40 $f(x) = -8 \log_3 (x - 4)$



للحل

42 **علوم:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. أوجد معكوس الدالة اللوغاريتمية المعطاة. (مثال 7)

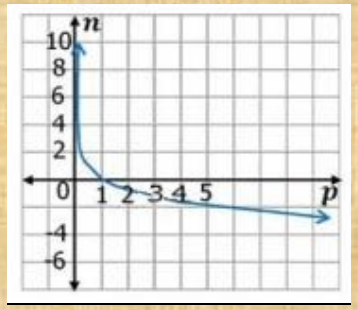
$$ps = \log_{10} R$$

معكوس الدالة اللوغاريتمية $R = 10^{ps}$

43 **تصوير:** تمثل الصيغة $n = \log_2 \frac{1}{p}$ درجة زر ضبط الإضاءة في آلة التصوير والمستعملة عند نقص الإضاءة، حيث p نسبة ضوء الشمس في منطقة التقاط الصورة. (مثال 7)

a) أُعدت آلة تصوير خالد لتلتقط الصورة تحت ضوء الشمس المباشر، ولكن الجو كان غائمًا. إذا كانت نسبة الإضاءة في اليوم الغائم تعادل $\frac{1}{4}$ الإضاءة في اليوم المشمس، فأي درجات زر ضبط الإضاءة يجب أن يستعملها خالد لتعويض نقص الإضاءة؟ 2

b) مثّل الدالة بيانيًّا.



c) استعمل التمثيل البياني في الفرع **b** لتقدير بنسبة إضاءة الشمس إذا قلت درجة زر ضبط الإضاءة 3 درجات. هل يؤدي ذلك إلى زيادة الإضاءة أم نقصانها؟ $\frac{1}{4}$؛ نقصان الإضاءة

للحل

44 **تربية :** لقياس مدى احتفاظ الطلاب بالمعلومات، يتم عادة اختبارهم بعد وقت من تعلمها ويمكن تقدير درجة سلمان في مادة الرياضيات بعد انتهاء الفصل الدراسي باستعمال المعادلة $y(t) = 85 - 6 \log_2 (t + 1)$ ، حيث t عدد الأشهر التي مضت بعد انتهاء الفصل الدراسي.

a) ما درجة سلمان في نهاية الفصل الدراسي $(t = 0)$ ؟ 85

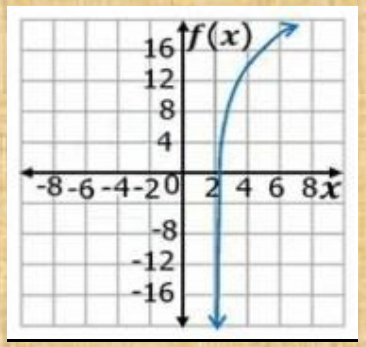
b) ما درجته بعد مضي 3 أشهر؟ 73

c) ما درجته بعد مضي 15 شهرًا؟ 61

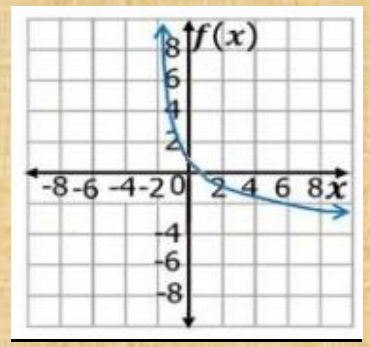
الحل

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا:

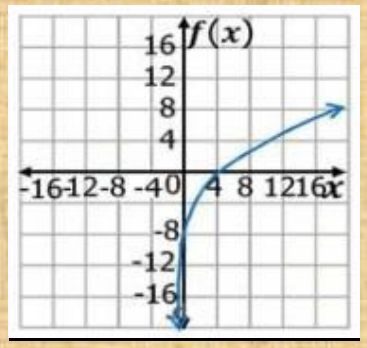
45 $f(x) = 4 \log_2 (2x - 4) + 6$



46 $f(x) = -3 \log_{12} (4x + 3) + 2$



47 $f(x) = 15 \log_{14} (x + 1) - 9$



للحل

48

إعلانات: تزداد المبيعات عادة مع زيادة الإنفاق على الدعاية والإعلان، وتقدر قيمة المبيعات لشركة بآلاف الريالات بالمعادلة، $S(a) = 10 + 20\log_4(a+1)$ ، حيث a المبلغ الذي يتم إنفاقه على الدعاية والإعلان بآلاف الريالات، $a \geq 0$.

a) تعني القيمة $S(0) \approx 10$ أنه إذا لم يُنفق شيء على الدعاية والإعلان، ستكون المبيعات 10000 ريال.
أوجد كلًّا من: $S(3), S(15), S(63)$.

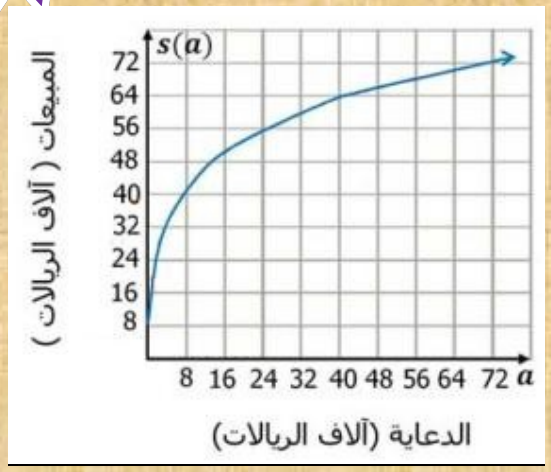
$S(63) = 70$, $S(15) = 50$, $S(3) = 30$.

b) فسر معنى كل من القيم التي أوجدتها في الفرع **a**.

إذا أنفق 3000 ريال على الدعاية والإعلانات ستكون مبيعات الشركة 30000 ريال . وإذا أنفق 15000 ريال ستكون مبيعات الشركة 50000 ريال وإذا أنفق 36000 ريال ستكون مبيعات الشركة 70000 ريال.

للحل

c) مثّل الدالة بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.



زيادة المبيعات بزيادة الانفاق على الدعاية

d) استعمل التمثيل البياني في الفرع c ، وإجابتك في الفرع a لتفسير تناقص أثر الدعاية عند إنفاق مبالغ كبيرة عليها.

يتضح من التمثيل البياني أنه كلما زاد المبلغ المنفق على الدعاية والإعلان عن 70000 ريال قل انحناء المنحنى ليتساوى المبلغ المنفق على الدعاية والإعلان مع قيمة المبيعات تقريباً

للحل

49 **أحياء:** زمن الجيل بالنسبة للخلايا البكتيرية هو الزمن اللازم ليصبح عددها مثليّ ما كان عليه.
فإذا كان زمن الجيل G لنوع معين من البكتيريا يُعطى بالصيغة $G = \frac{t}{3.3 \log_b f}$ ، حيث t
الفترة الزمنية، b عدد الخلايا البكتيرية عند بداية التجربة، f عدد الخلايا البكتيرية عند نهاية التجربة.

a) يبلغ زمن الجيل لبكتيريا مجهرية 16 h ، ما الزمن الذي تحتاج إليه 4 خلايا بكتيرية من هذا النوع ليصبح عددها 1024 ؟

$264h$ أو 11 يوماً.

b) إذا كان زمن الجيل لنوع من البكتيريا المخبرية 5 h، فما الوقت الذي تحتاج إليه 20 خلية بكتيرية من هذا النوع ليصبح عددها 160000 خلية؟

$66h$ أو يومان و $18h$.

c) تتكاثر بكتيريا E.coli بسرعة بحيث تتكاثر 6 منها لتصبح 1296 خلال 4.4 h .
احسب زمن الجيل لبكتيريا E.coli ؟

$\frac{1}{3}h$ أو $20min$.

خصائص اللوغاريتمات

2-4

تدرب وحل المسائل

للحل

استعمل $\log_4 3 \approx 0.7925$، $\log_4 5 \approx 1.1610$ لتقريب قيمة كل مما يأتي: (مثال 1)

1. $\log_4 18$

1.9535

2. $\log_4 15$

0.3685

3. $\log_4 \frac{5}{3}$

-0.2075

4. $\log_4 \frac{3}{4}$

2.085

عودة لفهرس الفصل (2)

للحل

استعمل $\log_4 2 = 0.5$, $\log_4 3 \approx 0.7925$, $\log_4 5 \approx 1.1610$ لتقريب قيمة كل مما يأتي: (مثال ١)

5 $\log_4 30$

2.4535

6 $\log_4 20$

2.1610

7 $\log_4 \frac{2}{3}$

−0.2925

8 $\log_4 \frac{4}{3}$

0.2075

9 $\log_4 9$

1.5850

10 $\log_4 8$

1.5

للحل

11 **تسلق الجبال:** يتناقص الضغط الجوي مع زيادة الارتفاع. ويمكن إيجاد قيمة الضغط الجوي عند الارتفاع a متر باستعمال العلاقة $a = 15500(5 - \log_{10} P)$، حيث P الضغط بالباسكال. أوجد قيمة الضغط الجوي بالباسكال عند قمم الجبال المذكورة في الجدول أدناه. (مثال 2)

القمة الجبلية	الارتفاع (m)
إفرست	8850
تريسوني	7074
بونيتي	6872

إفرست 26855.44 باسكال،
تريسوني 34963034 باسكال،
بونيتي 36028.42 باسكال.

12 **علوم:** ضربت هزة أرضية قوتها 5.9 درجة على مقياس ريختر منطقة سان فرانسيسكو الأمريكية عام 1979م، وفي عام 1906م ضربت هزة أرضية بقوة 8.3 درجات على مقياس ريختر المنطقة نفسها. (مثال 2)

للحل

a) كم مرة تزيد شدة الهزة الأرضية في عام 1906م على شدة الهزة الأرضية في عام 1979م؟

$10^{2.4} \approx 251$ مرة

b) رصد ريختر بنفسه الهزة الأرضية الأولى فقدر أن قوتها 8.3 درجات، وحديثًا دلت الأبحاث على أنها كانت 7.9 درجات على الأرجح، كم مرة تزيد شدة تقدير ريختر على التقدير الذي دلت عليه الأبحاث؟

$10^{0.4} \approx 2.5$ مرة

إذا كان $\log_6 8 \approx 1.1606$, $\log_5 7 \approx 1.2091$, $\log_3 5 \approx 1.465$, $\log_7 9 \approx 1.1292$ ،
فقرّب قيمة كل مما يأتي: (مثال 3)

13 $\log_3 25$ 2.93

14 $\log_5 49$ 2.4182

15 $\log_6 48$ 2.1606

16 $\log_7 81$ 2.2584

17 $\log_6 512$ 3.4818

18 $\log_7 729$ 3.3876

الحل

احسب قيمة كل عبارة مما يأتي: (مثال 4)

19 $\log_5 \sqrt[4]{25}$ — 0.5

20 $\log_2 \sqrt[5]{32}$ — 1

21 $3 \log_7 \sqrt[6]{49}$ — 1

22 $4 \log_2 \sqrt{8}$ — 6

23 $50 \log_5 \sqrt{125}$ — 75

24 $\log_3 \sqrt[6]{243}$ — $\frac{5}{6}$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة: (مثال 5)

25 $\log_9 6x^3y^5z$

$\log_9 6 + 3\log_9 x + 5\log_9 y + \log_9 z$

26 $\log_{11} ab^{-4}c^{12}d^7$

$\log_{11} a - 4\log_{11} b + 12\log_{11} c + 7\log_{11} d$

27 $\log_7 h^2j^{11}k^{-5}$

$2\log_7 h + 11\log_7 j - 5\log_7 k$

28 $\log_4 10t^2uv^{-3}$

$\log_4 10 + 2\log_4 t + \log_4 u - 3\log_4 v$

29 $\log_5 a^6b^{-3}c^4$

$6\log_5 a - 3\log_5 b + 4\log_5 c$

30 $\log_2 \frac{3x+2}{\sqrt[7]{1-5x}}$

$\log_2 (3x+2) - \frac{1}{7}\log_2 (1-5x)$

للحل

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة: (مثال 6)

31 $3\log_5 x - \frac{1}{2}\log_5 (6-x)$ $\log_5 \frac{x^3}{\sqrt{6-x}}$

32 $5\log_7 (2x) - \frac{1}{3}\log_7 (5x+1)$ $\log_7 \frac{32x^5}{\sqrt[3]{5x+1}}$

33 $7\log_3 a + \log_3 b - 2\log_3 (8c)$ $\log_3 \frac{a^7 b}{64c^2}$

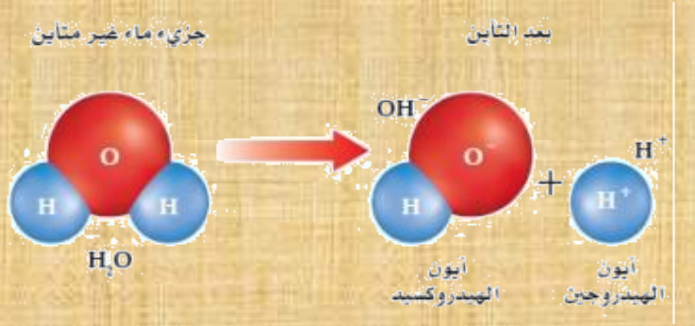
34 $2\log_8 (9x) - \log_8 (2x-5)$ $\log_8 \frac{81x^2}{(2x-5)}$

35 $2\log_6 (5a) + \log_6 b + 7\log_6 c$ $\log_6 25a^2bc^7$

36 $\log_2 x - \log_2 y - 3\log_2 z$ $\log_2 \frac{x}{yz^3}$

للحل

37 **كيمياء:** ثابت التأين للماء K_w هو حاصل ضرب تركيز أيونات الهيدروجين (H^+) في تركيز أيونات الهيدروكسيد $[OH^-]$.



صيغة ثابت التأين للماء هي $K_w = [H^+][OH^-]$ حيث تشير الأقواس إلى التركيز بالمولّ لكل لتر.

a) عبّر عن $\log K_w$ بدلالة $\log [H^+]$ و $\log [OH^-]$.

$$\log k_w = \log [H^+] + \log [OH^-]$$

b) قيمة الثابت K_w هي 1×10^{-14}. بسّط المعادلة في فرع a لتعكس القيمة العددية لـ K_w.

$$-14 = \log [H^+] + \log [OH^-]$$

c) إذا كان تركيز أيونات الهيدروجين في عينة من الماء 1×10^{-9} مول لكل لتر، فما تركيز أيونات الهيدروكسيد؟ 1×10^{-5} mol/L

للحل

حدد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم خطأ:

38 $\log_8 (x - 3) = \log_8 x - \log_8 3$ خطأ

39 $\log_5 22x = \log_5 22 + \log_5 x$ صحيحة

40 $\log_{10} 19k = 19 \log_{10} k$ خطأ

41 $\log_2 y^5 = 5 \log_2 y$ صحيحة

42 $\log_7 \frac{x}{3} = \log_7 x - \log_7 3$ صحيحة

43 $\log_4 (z + 2) = \log_4 z + \log_4 2$ خطأ

44 $\log_8 p^4 = (\log_8 p)^4$ خطأ

45 $\log_9 \frac{x^2y^3}{z^4} = 2 \log_9 x + 3 \log_9 y - 4 \log_9 z$ صحيحة

للحل

46 **هزات أرضية** يبين الجدول أدناه بعض الهزات الأرضية القوية التي ضربت بعض البلدان، وقوة كل منها على مقياس ريختر .

السنة	المكان	الدرجة على مقياس ريختر
1939 م	تركيا	8.0
1963 م	يوغسلافيا	6.0
1970 م	البيرو	7.8
1988 م	أرمينيا	7.0
2004 م	مراكش	6.4

a) أي هزتين كانت شدة إحداهما تعادل 10 أمثال شدة الأخرى؟
وأي هزتين كانت شدة إحداهما تعادل 100 مثل شدة الأخرى؟

أرمينيا و يوغسلافيا ، أو تركيا وأرمينيا.

تركيا و يوغسلافيا .

b) كم درجة على مقياس ريختر تسجل هزة أرضية إذا كانت شدتها تعادل 1000 مثل شدة هزة يوغسلافيا عام 1963 م؟

9.0

حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

2-5

تدرب وحل المسائل

للحل

حُلّ كل معادلة مما يأتي: (مثال 1)

1. $\log_8 x = \frac{4}{3}$ — $x = 16$
2. $\log_{16} x = \frac{3}{4}$ — $x = 8$
3. $\log_{81} x = \frac{3}{4}$ — $x = 27$
4. $\log_{25} x = \frac{5}{2}$ — $x = 3125$
5. $\log_8 \frac{1}{2} = x$ — $x = -\frac{1}{3}$
6. $\log_6 \frac{1}{36} = x$ — $x = -2$
7. $\log_x 32 = \frac{5}{2}$ — $x = 4$
8. $\log_x 27 = \frac{3}{2}$ — $x = 9$

عودة لفهرس الفصل (2)

للحل

حُلّ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك: (المثالان 2, 3)

9 $5 \log_2 x = \log_2 32$

$x = 2$

10 $3 \log_2 x = \log_2 8$

$x = 2$

11 $\log_4 48 - \log_4 n = \log_4 6$

$n = 8$

12 $\log_3 2x + \log_3 7 = \log_3 28$

$x = 2$

13 $\log_2 (4x) + \log_2 5 = \log_2 40$

$x = 2$

14 $\log_4 a + \log_4 8 = \log_4 24$

$x = 9$

15 $\log_2 n = \frac{1}{3} \log_2 27 + \log_2 36$

$n = 108$

16 $3 \log_{10} 8 - \frac{1}{2} \log_{10} 36 = \log_{10} x$

$x = 85\frac{1}{3}$

للحل

حُلّ كل متباينة مما يأتي: (مثال 4)

17 $\log_5 x > 3$ $\{x \mid x > 125\}$

18 $\log_8 x \le -2$ $\{x \mid 0 < x \le \frac{1}{64}\}$

19 $\log_6 x < -3$ $\{x \mid 0 < x < \frac{1}{216}\}$

20 $\log_4 x \ge 4$ $\{x \mid x \ge 256\}$

21 $\log_3 x \ge -4$ $\{x \mid x \ge \frac{1}{81}\}$

22 $\log_2 x \le -2$ $\{x \mid 0 < x \le \frac{1}{4}\}$

حُلّ كل متباينة مما يأتي، ثم تحقق من حلك: (مثال 5)

23 $\log_4 (2x + 5) \le \log_4 (4x - 3)$ $\{x \mid x \ge 4\}$

24 $\log_8 (2x) > \log_8 (6x - 8)$ $\{x \mid \frac{4}{3} < x < 2\}$

25 $\log_2 (4x - 6) > \log_2 (2x + 8)$ $\{x \mid x > 7\}$

26 $\log_7 (x + 2) \ge \log_7 (6x - 3)$ $\{x \mid x \le 1\}$

للحل

27 **صوت:** يعطى ارتفاع الصوت L بالصيغة $L = 10\log_{10} R$، حيث R هي الشدة النسبية للصوت.
احسب الشدة النسبية لصوت منبه ارتفاع صوته 80 ديسبل.

$$R = 10^8$$

28 **علوم:** تُقاس قوة الهزات الأرضية بمقياس لوغاريتمي ذي درجات يُسمى مقياس ريختر، وتُعطى قوة الهزة الأرضية M بالمعادلة $M = \log_{10} x$، حيث x سعة الموجة المسببة للحركة الأرضية.

a) كم تبلغ سعة موجة هزة أرضية سجلت 6 درجات على مقياس ريختر؟

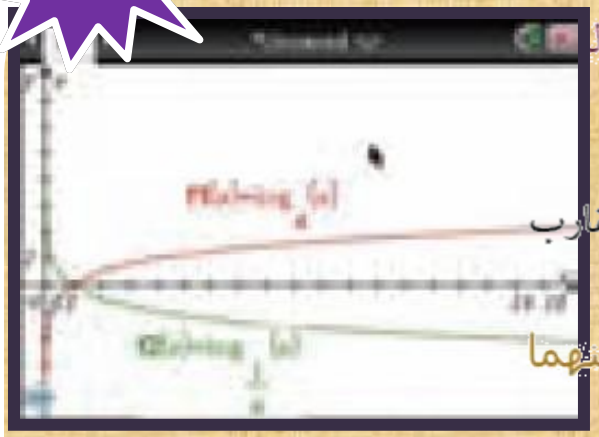
$$x = 10^6$$

b) كم مرة تبلغ سعة موجة هزة أرضية قوتها 8 درجات بمقياس ريختر مقارنة بسعة موجة هزة أرضية قوتها 5 درجات على المقياس نفسه؟

10^3 أو 1000 مرة أكبر.

للحل

29 **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة التمثيل ال
للدالتين $y = \log_4 x$ ، $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.



a) **تحليليًا:** قارن بين منحنيي الدالتين من حيث خطوط التقارب ومقاطع المحور x؟

التمثيلان البيانيان متشابهان وخط تقارب كل منهما المحور y، ومقطع المحور x لهما 1.

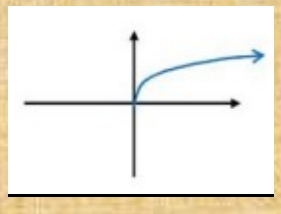
b) **لفظيًا:** صف العلاقة بين منحنيي الدالتين.

التمثيلان البيانيان يمثلان انعكاساً لبعضهما بعضاً في المحور x

للحل

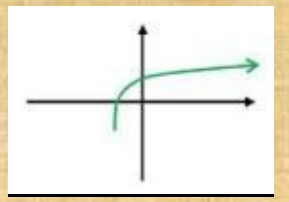
c) **بيانيًا:** استعمل ما تعرفه عن تحويلات التمثيلات البيانية لمقارنة التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي بالتمثيل البياني للدالة $y = \log_4 x$ وذلك بعد تمثيل كل منها بيانيًا:

1) $y = \log_4 x + 2$



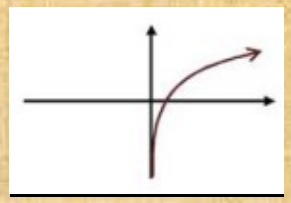
التمثيل البياني الثاني مشابه للتمثيل البياني الأول مع إزاحة إلى الأعلى وحدتين.

2) $y = \log_4 (x + 2)$



التمثيل البياني الثاني مشابه للتمثيل البياني الأول مع إزاحة أفقية بمقدار وحدتين.

3) $y = 3 \log_4 x$



الإحداثي – y لكل نقطة على التمثيل البياني الثاني يساوي 3 أمثال الإحداثي المناظر له على التمثيل البياني الأول.

للحل

d) تحليليًا: صف العلاقة بين كل من الدالتين $y = -1(\log_4 x)$ و $y = \log_4 x$ وما مجال ومدى كل منهما؟

التمثيلان البيانيان يمثلان انعكاساً لبعضهما بعضاً في المحور x؛ المجال $= \{x \mid x > 0\}$، المدى $= R$

e) تحليليًا: اكتب معادلة لدالة يكون تمثيلها البياني يشبه التمثيل البياني للدالة $y = \log_3 x$ بعد إزاحتها 4 وحدات إلى اليسار ووحدة إلى الأعلى.

$$y = \log_3 (x + 4) + 1$$

30 **علوم:** تُعطى سرعة الرياح w بالميل لكل ساعة قرب مركز الإعصار بالمعادلة $w = 93 \log_{10} d + 65$، حيث d المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل.

a) اكتب المعادلة بصورة أسية. $d = 10^{\frac{w-56}{93}}$

b) ماسرعة الرياح قرب مركز إعصار قطع مسافة 525 ميلًا؟ $317.97\ mi/h$

للحل

31 **صوت:** تُعطى العلاقة بين شدة الصوت بالواط لكل متر مربع I وعدد وحدات الديسبل β بالمعادلة $\beta = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$.

الصوت	شدة الصوت	الديسبل
سقوط قطرة ماء	10^{0}	0
التنفس الطبيعي	10^{1}	1
مجففة الملابس	10^{6}	6
القطار	10^{10}	10
الإطفائية	10^{12}	12

a) أوجد عدد وحدات الديسبل لصوت شدته 1 واط لكل متر مربع وكذلك لصوت شدته 10^{-2} واط لكل متر مربع.

120 , 100

b) إذا كانت شدة الصوت 1 واط لكل متر مربع تعادل 100 مرة من شدة صوت تساوي 10^{-2} واط لكل متر مربع. فلماذا لا يساوي عدد وحدات الديسبل 100 مرة من 10^{-2} واط لكل متر مربع؟

تتغير قوة اللوغاريتم بمقدار 2، مما يعني أن عدد وحدات الديسبل تتغير بمقدار
$10 \log_{10} 10^{2}$ أو $20 \log_{10} 10 = 20$

اللوغاريتمات العشرية

2-6

تدرب وحل المسائل

للحل

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف: (مثال 1)

1) log 5
0.6990

2) log 21
1.3222

3) log 0.4
-0.3979

4) log 3
0.4771

5) log 11
1.0414

6) log 3.2
0.5051

7) log 8.2
0.9138

8) log 0.9
-0.0458

9) log 0.04
-1.3979

عودة لفهرس الفصل (2)

الحل

10 **علوم:** ترتبط كمية الطاقة E مقيسة بوحدة الإيرج التي تطلقها الأرض مع قوة الهزة على مقياس ريختر M بالمعادلة $\log E = 11.8 + 1.5M$. استعمل المعادلة لإيجاد كمية الطاقة التي تطلقها الارض عند هزة أرضية بقوة 8.5 درجات على مقياس ريختر. (مثال 2)

3.55×10^{24} أيرج

11 **صوت:** أغلق حسن نوافذ سيارته فانخفض ارتفاع الصوت من 85 dB إلى 73 dB. (مثال 2)

a) كم مرّة من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان تساوي شدة الصوت قبل إغلاق نوافذ السيارة إذا كانت $m = 1$؟

316227766 مرة تقريباً.

b) كم مرةً من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان تساوي شدة الصوت بعد إغلاق نوافذ السيارة؟ أوجد نسبة انخفاض شدة الصوت بعد إغلاق النوافذ.

19952623 مرة تقريباً؛ 93.7% تقريباً.

الحل

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف: (مثال 3)

12 $6^x = 40$ — 2.0588

13 $2.1^{a+2} = 8.25$ — 0.8442

14 $7^{x^2} = 20.42$ — ± 1.2451

15 $11^{b-3} = 5^b$ — 9.1237

16 $8^x = 40$ — 1.7740

17 $5^x = 55$ — 2.4899

18 $9^{b-1} = 7^b$ — 8.7429

19 $15^{x^2} = 110$ — ± 1.3175

20 $9^{6y-2} = 3^{3y+1}$ — $\frac{5}{9} \approx 0.5556$

21 $8^{2x-4} = 4^{x+1}$ — $\frac{7}{2} = 3.5$

22 $16^x = \sqrt{4^{x+3}}$ — 1

23 $2^y = \sqrt{3^{y-1}}$ — -3.8188

الحل

حل كل مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف: (مثال 4)

24 $5^{4n} > 33$ $\{n \mid n > 0.5431\}$

25 $6^{p-1} = 4^p$ $\{p \mid p \leq 4.4190\}$

26 $3^{y-1} \leq 4^y$ $\{y \mid y \geq -3.8188\}$

27 $5^{p-2} \leq 2^p$ $\{p \mid p \geq 3.5129\}$

28 $2^{4x} \leq 20$ $\{x \mid x \leq 1.0805\}$

29 $6^{3n} > 36$ $\{n \mid n > 0.6667\}$

اكتب كلًّا مما يأتي بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف: (مثال 5)

30 $\log_3 7$ $\frac{\log 7}{\log 3} = 1.7712$

31 $\log_2 16$ $\frac{\log 16}{\log 2} = 4$

32 $\log_4 9$ $\frac{\log 9}{\log 4} = 1.5850$

33 $\log_3 21$ $\frac{\log 21}{\log 3} = 2.7712$

34 $\log_5 (2.7)^2$ $\frac{\log 7.29}{\log 5} = 1.2343$

35 $\log_7 \sqrt{5}$ $\frac{\log \sqrt{5}}{\log 7} = 0.4135$

الحل

36 **شحن:** اشترت إحدى شركات خدمة الشحن سيارة شحن جديدة بسعر 168000 ريال. افرض $t = \log_{(1-r)} \frac{V}{P}$ حيث t الزمن بالسنوات الذي مر منذ الشراء، P سعر الشراء، V السعر الحالي، r المعدل السنوي لانخفاض السعر. (مثال 6)

a) إذا كان السعر الحالي للشاحنة 120000 ريال وانخفض سعرها بمعدل 15% سنويًا فما الزمن الذي مر منذ شرائها لأقرب سنة؟

سنتان

b) إذا كان السعر الحالي للشاحنة 102000 ريال وانخفض سعرها بمعدل 10% سنويًا، فما الزمن الذي مر منذ شرائها لأقرب سنة؟

5 سنوات

للحل

37 **علوم البيئة :** يقوم مهندس بيئي بفحص مياه الشرب في أحد الآبار الجوفية للتأكد من عدم تلوثها بمادة الزرنيخ، والتي يُقدر معدلها الطبيعي في ماء الشرب بـ 0.025 جزء من المليون (ppm)، كما أن مستوى pH لمادة الزرنيخ يجب أن يقل عن 9.5. فإذا كان قانون تركيز أيون الهيدروجين هو $\mathrm{pH} = -\log H$.

a) إذا كان تركيز أيون الهيدروجين في الماء 1.25×10^{-11}، فهل يعني ذلك ارتفاع مستوى الزرنيخ؟

نعم؛ لأن $9.5 < 10.9$

b) إذا وجد المهندس 1mg من الزرنيخ في عينة حجمها $3l$ من الماء، فهل ماء البئر صالح للشرب؟
(إرشاد: 1 kg من الماء يعادل 1 L تقريبًا. $1\ \mathrm{ppm} = 1\ \mathrm{mg/kg}$)

لا

c) ما تركيز أيون الهيدروجين الذي يكافئ مستوى pH المقلق (9.5)؟

3.16×10^{-10}

38 **هزات أرضية :** يمكن تحديد قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر M باستعمال المعادلة $M = \frac{2}{3}\log\frac{E}{10^{4.4}}$، حيث E كمية الطاقة الزلزالية التي تطلقها الأرض عند حدوث الهزة الأرضية مقيسة بوحدة الجول.

الحل

a) استعمل خصائص اللوغاريتمات لتكتب المعادلة بالصورة المطولة.

$$M = \frac{2}{3}[\log E - \log 10^{4.4}]$$

b) أطلقت الأرض طاقة زلزالية مقدارها 7.94×10^{11} جول عند حدوث هزة أرضية. كم قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر؟

c) أطلقت الأرض طاقة زلزالية مقدارها 4.47×10^{12} جول عند حدوث زلزال ألوم رول في كاليفورنيا عام 2007 م. كما أطلقت الأرض طاقة زلزالية مقدارها 1.58×10^{18} جول عند حدوث زلزال انكورج في الاسكا عام 1964. كم مرّة تفوق قوة زلزال أنكورج قوة زلزال ألوم روك على مقياس ريختر؟

d) بصورة عامة ، لا يمكن الشعور بالهزة الأرضية إلاّ إذا بلغت قوتها 3 درجات على مقياس ريختر أو أكثر. ما الطاقة الزلزالية بالجول التي تطلقها الأرض عند حدوث هزة أرضية لها هذه القوة على مقياس ريختر؟

للحل

39 **تمثيلات متعددة:** ستحل في هذه المسألة المعادلة الأسية $4^x = 13$.

a) **جدوليًا:** أدخل الدالة $y = 4^x$ في الحاسبة البيانية وأنشئ جدول قيم للدالة، وابحث عن قيمة x المقابلة للقيمة $y = 13$ في الجدول.

b) **بيانيًا:** مثّل بيانيًا المعادلة $y = 4^x$ والمستقيم $y = 13$ على الشاشة نفسها، واستعمل أمر intresect لإيجاد نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين.

c) **عدديًا:** حُلّ المعادلة جبريًا. هل طريقتي الحل تعطيان النتيجة نفسها؟ فسّر إجابتك.

الفصل (3)
المتطابقات والمعادلات المثلثية

3-1

3-2

3-3

3-4

3-5

عودة لفهرس تدرب

تدرب وحل المسائل

الحل

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية علمًا بأن: $0° < \theta < 90°$ (مثال 1)

1. $\tan\theta$، إذا كان $\cot\theta = 2$ $\quad \tan\theta = \frac{1}{2}$

2. $\csc\theta$، إذا كان $\cos\theta = \frac{2}{3}$ $\quad \csc\theta = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

3. $\tan\theta$، إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{2}$ $\quad \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

عودة لفهرس الفصل (3)

الحل

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية، علمًا بأن: $270° < \theta < 360°$. (مثال 1)

4) $\cos\theta = \frac{5}{13}$ إذا كان، $\sin\theta$ — $\sin\theta = -\frac{12}{13}$

5) $\tan\theta = -1$ إذا كان، $\sec\theta$ — $\sec\theta = \sqrt{2}$

6) $\csc\theta = -\frac{5}{3}$ إذا كان، $\cos\theta$ — $\cos\theta = \frac{4}{5}$

بسِّط كل عبارة مما يأتي: (مثال 2)

7) $\tan\theta\cos^2\theta$ — $\sin\theta\cos\theta$

8) $\csc^2\theta - \cot^2\theta$ — 1

9) $\frac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta}$ — $\cot^2\theta$

10) $\sec\theta\tan^2\theta + \sec\theta$ — $\sec^3\theta$

11) $\sin\theta(1 + \cot^2\theta)$ — $\csc\theta$

12) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\sec\theta$ — 1

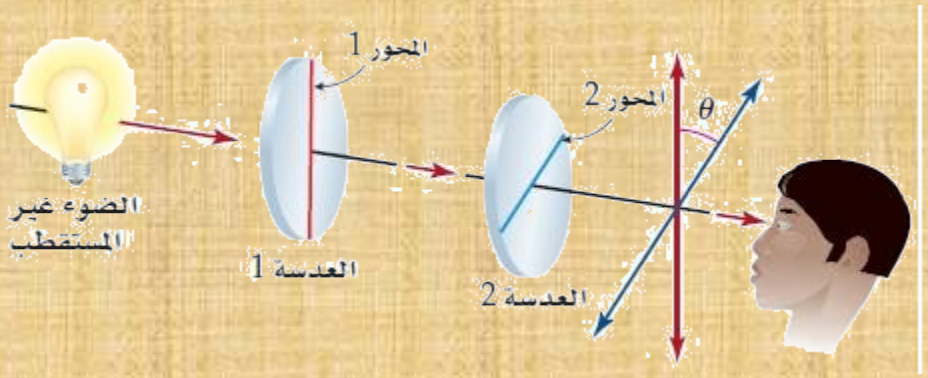
13) $\frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)}$ — $-\cot\theta$

14) $(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)$ — $\cos^2\theta$

15) $2 - 2\sin^2\theta$ — $2\cos^2\theta$

للحل

16 **بصريات:** عندما يمر الضوء من خلال عدسة مستقطبة للضوء، فإن شدة الضوء المار بهذه العدسة سيقل بمقدار النصف. ثم إذا مرّ الضوء بعدسة أخرى بحيث يكون محور هذه العدسة يصنع زاوية قياسها θ مع محور العدسة الأولى، فإن شدة الضوء تقل مرة أخرى. يمكننا إيجاد شدة الضوء باستعمال الصيغة $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2 \theta}$، حيث I_0 شدة الضوء القادمة من العدسة الأولى المستقطبة، I هي شدة الضوء الخارجة من العدسة الثانية، θ الزاوية بين محوري العدستين. (مثال 3)



a) بسّط الصيغة بدلالة $\cos \theta$ $I = I_0 \cos^2 \theta$

b) استعمل الصيغة المبسطة ، لمعرفة شدة الضوء المار بالعدسة الثانية بدلالة شدة الضوء قبل المرور بها إذا كان محور العدسة الثانية يصنع زاوية قياسها $30°$ مع محور العدسة الأولى.

$I = \frac{3}{4} I_0$: شدة الضوء تساوي ثلاثة أرباع شدة الضوء قبل المرور بالعدسة الثانية.

للحل

17 **الشمس:** ترتبط قدرة كل جسم على امتصاص الطاقة بعامل يُسمّى قابلية الامتصاص للجسم e. ويمكن حساب قابلية الامتصاص باستعمال العلاقة $e = \frac{W \sec\theta}{AS}$، حيث W معدل امتصاص جسم الإنسان للطاقة من الشمس، و S مقدار الطاقة المنبعثة من الشمس بالواط لكل متر مربّع، و A المساحة السطحية المعرّضة لأشعة الشمس، و θ الزاوية بين أشعة الشمس والخط العمودي على الجسم.

a) حل المعادلة بالنسبة لِـ W، واكتب إجابتك بحيث لا تظهر فيها نسب مثلثية سوى $\sin\theta$ أو $\cos\theta$.

$$W = e\,AS\,\cos\theta$$

b) أوجد W إذا كانت $e = 0.80,\ \theta = 40°,\ A = 0.75,\ S = 1000\ W/m^2$.
(قرّب إلى أقرب جزء من مئة).

$$459.63\ W$$

للحل

18 **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، سوف تستعمل الحاسبة البيانية؛ لتحدد إذا كانت معادلة ما تمثل متطابقة مثلثية أم لا. هل تُمثّل المعادلة: $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta \sin^2\theta$ متطابقة؟

θ	0	30°	45°	60°
$\tan^2\theta - \sin^2\theta$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$
$\tan^2\theta \sin^2\theta$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$

a) **جدوليًا:** أكمل الجدول الآتي.

b) **بيانيًا:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثل كلًّا من طرفي المعادلة $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta \sin^2\theta$ كدالة، بيانيًّا.

c) **تحليليًا:** إذا كان التمثيلان البيانيان لدالتين غير متطابقين؛ فإن المعادلة ليست متطابقة. هل التمثيلان البيانيان في الفرع **b** متطابقان؟

نعم.

d) **تحليليًا:** استعمل الحاسبة البيانية لمعرفة إذا كانت المعادلة: $\sec^2 x - 1 = \sin^2 x \sec^2 x$ تمثل متطابقة أم لا. (تأكد أنّ الحاسبة البيانية بنظام الدرجات)

نعم.

للحل

19 **التزلّج على الجليد:** يتزلّج شخص كتلته m باتجاه أسفل هضبة ثلجية بزاوية قياسها θ درجة وبسرعة ثابتة. عند تطبيق قانون نيوتن في مثل هذه الحالة يتم استعمال نظام المعادلات الآتي:
$F_n - mg\cos\theta = 0,\ mg\sin\theta - \mu_k F_n = 0$، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية، و F_n القوة العمودية المؤثّرة في المتزلج، و μ_k معامل الاحتكاك. استعمل هذا النظام لتكتب μ_k كدالة في θ.

$$\mu_k = tan\theta$$

بسط كل مما يأتي:

20 $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-1}{1+\sin(-\theta)}$

-1

21 $\dfrac{\sec\theta\sin\theta+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{1+\sec\theta}$

$sin\theta$

اثبات صحة المتطابقات المثلثية

3-2

تدرب وحل المسائل

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة: (مثال 1)

1 $\cos^2\theta + \tan^2\theta \cos^2\theta = 1$

الحل

$$\cos^2\theta + \tan^2\theta \cos^2\theta$$
$$= \cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cos^2\theta$$
$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta$$
$$= 1$$

2 $\cot\theta(\cot\theta + \tan\theta) = \csc^2\theta$

$$\cot\theta(\cot\theta + \tan\theta)$$
$$= \cot^2\theta + \cot\theta\tan\theta$$
$$= \cot^2\theta + 1$$
$$= \csc^2\theta$$

عودة لفهرس الفصل (3)

الحل

3 $1 + \sec^2\theta \sin^2\theta = \sec^2\theta$

$$1 + \sec^2\theta \sin^2\theta$$

$$= 1 + \frac{1}{\cos^2\theta} \sin^2\theta$$

$$= 1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= 1 + \tan^2\theta$$

$$= \sec^2\theta$$

4 $\sin\theta \sec\theta \cot\theta = 1$

$$\sin\theta \sec\theta \cot\theta$$

$$= \sin\theta \cdot \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= 1$$

للحل

$$\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = (\csc\theta - \cot\theta)^2$$ 5

$$\frac{1-2\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \tan\theta - \cot\theta$$ 6

$$\tan\theta = \frac{\sec\theta}{\csc\theta}$$ 7

$$\cos\theta = \sin\theta\cot\theta$$ 8

$$(\sin\theta - 1)(\tan\theta + \sec\theta) = -\cos\theta$$ 9

$$\cos\theta\cos(-\theta) - \sin\theta\sin(-\theta) = 1$$ 10

الحل

11 **اختيار من متعدد:** أي عبارة مما يأتي تكافئ العبارة $\frac{\tan^2\theta + 1}{\tan^2\theta}$ ؟ (مثال 2)

A $\sin^2\theta$ **B** $\tan^2\theta$

C $\cos^2\theta$ **D** $\csc^2\theta$

$\csc^2\theta$ D

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة: (مثال 3)

12 $\sec\theta - \tan\theta = \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta}$

13 $\frac{1 + \tan\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = \sec\theta$

14 $\sec\theta \csc\theta = \tan\theta + \cot\theta$

15 $\sin\theta + \cos\theta = \frac{2\sin^2\theta - 1}{\sin\theta - \cos\theta}$

للحل

17 $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

16 $(\sin\theta+\cos\theta)^2 = \dfrac{2+\sec\theta\csc\theta}{\sec\theta\csc\theta}$

19 $\cos\theta\cot\theta = \csc\theta - \sin\theta$

18 $\csc\theta - 1 = \dfrac{\cot^2\theta}{\csc\theta+1}$

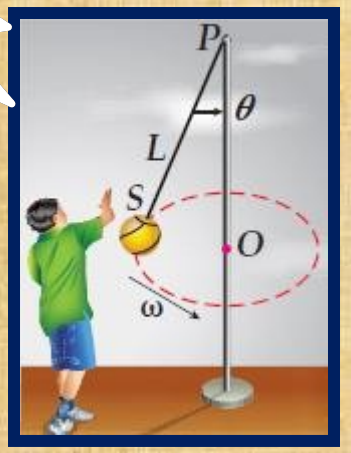
21 $(\csc\theta-\cot\theta)^2 = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

20 $\sin\theta\cos\theta\tan\theta+\cos^2\theta = 1$

23 $\dfrac{\sec\theta-\csc\theta}{\csc\theta\sec\theta} = \sin\theta-\cos\theta$

22 $\csc^2\theta = \cot^2\theta+\sin\theta\csc\theta$

الحل



24

يُبيّن الشكل المجاور إحدى الألعاب. فعندما تدور الكرة حول العمود، فإنها تكوّن مع الحبل شكلاً مخروطيًا.
إذا علمت أن العلاقة بين طول الحبل L والزاوية المحصورة بين الحبل والعمود تُعطى بالصيغة:

$L = \dfrac{g \sec\theta}{\omega^2}$، فهل الصيغة $L = \dfrac{g \tan\theta}{\omega^2 \sin\theta}$

هي أيضًا تُمثّل العلاقة بين L, θ؟ وضح إجابتك

25

جري: مضمار سباق نصف قطره $16.7\,m$. إذا ركض أحد العدّائين في هذا المضمار، وكان جيب زاوية ميله θ يساوي $\frac{1}{4}$. فأوجد سرعة العدّاء.

إرشاد: أوجد $\cos\theta$ أولاً، ثم استعمل صيغة زاوية الميل الواردة في فقرة "لماذا؟".

$6.5\ m/S$

للحل

عند تبسيط كل من العبارات الآتية، هل تحصل على 1 أم 1− ؟

26 $\cot(-\theta)\tan(-\theta)$

1

27 $\sin\theta\csc(-\theta)$

-1

28 $\sin^2(-\theta)+\cos^2(-\theta)$

1

29 $\sec(-\theta)\cos(-\theta)$

1

30 $\sec^2(-\theta)-\tan^2(-\theta)$

1

31 $\cot(-\theta)\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

-1

32 $\cos(-\theta)\sec\theta$

1

33 $\sin(-\theta)\csc\theta$

-1

للحل

بسّط كل مما يأتي إلى قيمة عددية، أو إلى دالة مثلثية أساسية:

34 $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\csc\theta}{\csc^2\theta}$

$\cos\theta$

35 $\dfrac{1+\tan\theta}{1+\cot\theta}$

$\tan\theta$

36 $\dfrac{\sec^2\theta-\tan^2\theta}{\cos^2 x+\sin^2 x}$

1

37 $\tan\theta\cos\theta$

$\sin\theta$

38 $\cot\theta\tan\theta$

1

39 $\sec\theta\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

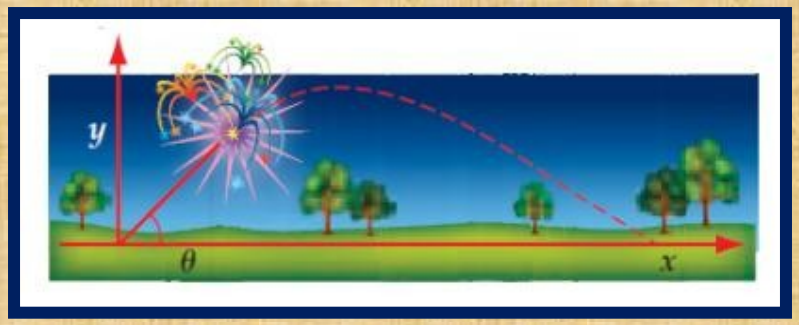
1

40 $(\sec^2\theta+\csc^2\theta)-(\tan^2\theta+\cot^2\theta)$

2

الحل

41 **فيزياء:** عند إطلاق الألعاب النارية من سطح الأرض، فإن ارتفاع الألعاب y والإزاحة الأفقية x ترتبطان بالعلاقة: $y = \frac{-gx^2}{2v_0^2 \cos^2\theta} + \frac{x \sin\theta}{\cos\theta}$، حيث v_0 هي السرعة الابتدائية للمقذوفات، θ زاوية الإطلاق، g تسارع الجاذبية الأرضية. أعد كتابة هذه العلاقة بحيث تظهر الدالة المثلثية $\tan\theta$ وحدها في العلاقة.



$$y = \frac{-gx^2}{2v_0^2}(\tan^2\theta + 1) + x\tan\theta$$

42 **إلكترونيات:** عند مرور تيار متردّد من خلال مقاومة R، فإن القدرة P بعد t من الثوانى تُعطى بالصيغة: $P = I_0^2 R \sin^2 2\pi ft$، حيث f التردد، I_0 أعلى قيمة للتيار.

a) اكتب صيغة للقدرة بدلالة $\cos^2 2\pi ft$.

$$P = I_0^2 R(1 - \cos^2 2\pi ft)$$

b) اكتب صيغة للقدرة بدلالة $\csc^2 2\pi ft$.

$$P = \frac{I_0^2 R}{\csc^2 2\pi ft}$$

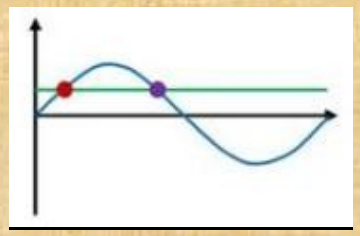
للحل

تمثيلات متعددة: في هذه المسألة، ستكتشف طريقة حل معادلة مثلثية مثل $2\sin x = 1$.

a) جبريًا: أعد كتابة المعادلة السابقة بحيث تكون $\sin x$ فقط في أحد الطرفين.

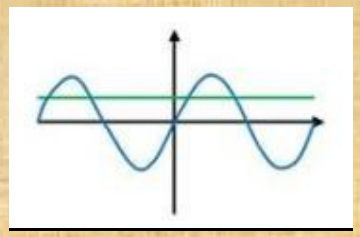
$$\sin x = \frac{1}{2}$$

b) بيانيًا: مثل كلًّا من طرفي المعادلة التي أوجدتها في الفرع **a** بيانيًّا كدالة في المجال $0 \le x < 2\pi$ وفي المستوى الإحداثي نفسه. ثم حدد جميع نقاط التقاطع بينهما، وأوجد قيم x بالراديان.



يتقاطع التمثيل البياني للدالتين $y = \frac{1}{2}$ ، $y = \sin x$ عند النقاط $x = \frac{\pi}{6}$ ، $x = \frac{5\pi}{6}$ على الفترة $[0, 2\pi)$

c) بيانيًا: مثل كلًّا من طرفي المعادلة التي أوجدتها في الفرع **a** بيانيًّا، كدالة في المجال $-2\pi < x < 2\pi$ وفي المستوى الإحداثي نفسه، ثم حدد جميع نقاط التقاطع بينهما، وأوجد قيم x بالراديان.



يتقاطع التمثيل البياني للدالتين $y = \frac{1}{2}$ ، $y = \sin x$ عند النقاط $\frac{5\pi}{6}$، $\frac{\pi}{6}$، $\frac{-7\pi}{6}$ ، $\frac{-11\pi}{6}$ ؛ على الفترة $[-2\pi, 2\pi)$

d) لفظيًا: خمن الصيغة العامة لحلول المعادلة. وضح إجابتك.

بما أن الجيب دالة دورية، تكون حلول المعادلة هي $x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$ ، $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ ، حيث n عدد صحيح.

المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

3-3

تدرب وحل المسائل

الحل

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (مثال 1)

1) $\cos 165^\circ$ $-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

2) $\cos 105^\circ$ $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

3) $\cos 75^\circ$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

4) $\sin(-30^\circ)$ $-\frac{1}{2}$

5) $\sin 135^\circ$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

6) $\sin(-210^\circ)$ $\frac{1}{2}$

7) $\cos 135^\circ$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

8) $\tan 195^\circ$ $2-\sqrt{3}$

عودة لفهرس الفصل (3)

للحل

9 **كهرباء:** يمر تيار كهربائي متردّد في دائرة كهربائية، وتعطى شدة هذا التيار c بالأمبير بعد t ثانية بالصيغة $c = 2\sin(120\,t)$. (مثال 2)

a) أعد كتابة الصيغة، باستعمال مجموع زاويتين.

$$c = 2sin(90^o t + 30^o t).$$

b) استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

$\sqrt{3}$ أمبير.

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة: (مثال 3)

10 $\sin(90° + \theta) = \cos\theta$

11 $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta$

12 $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot\theta$

13 $\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$

14 $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$

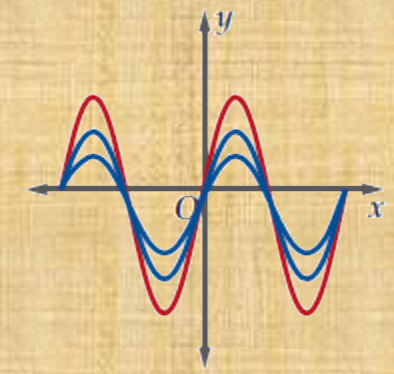
15 $\tan(\theta + 45°) = \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$

للحل

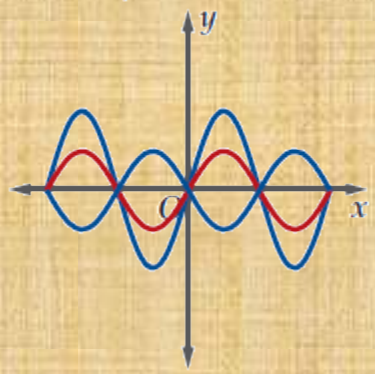
16

الكترونيات: ارجع إلى فقرة "لماذا؟"، في بداية الدرس. عندما تتلاقى موجتان وتنتج موجة سعتها أكبر من سعة كل من الموجتين يكون التداخل بناء، وبعكس ذلك يكون هداما.

تداخل بناء



تداخل هدام



إذا علمت أن كلًّا من الدالتين:

$y_1 = 10 \sin (2t + 210°), y_2 = 10 \sin (2t + 30°)$.

تمثل موجة، فأوجد مجموع الدالتين، وفسر معناه.

مجموع الدالتين يساوي صفر، و معناه تداخل هدام.

للحل

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

17 $\tan 165°$

$-2+\sqrt{3}$

18 $\sec 1275°$

$\sqrt{2}-\sqrt{6}$

19 $\sin 735°$

$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

20 $\tan \frac{23\pi}{12}$

$-2+\sqrt{3}$

21 $\csc \frac{5\pi}{12}$

$\sqrt{6}-\sqrt{2}$

22 $\cot \frac{113\pi}{12}$

$2-\sqrt{3}$

للحل

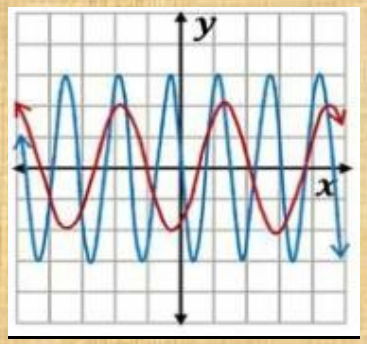
23 **قوة:** في الشكل أدناه، إذا كان مقدار القوة الكافية F لإبقاء الخزنة ثابتة على المنحدر تعطى بالعلاقة $F = \dfrac{W(\sin A + \mu \cos A)}{\cos A - \mu \sin A}$، حيث W هو وزن الخزنة، $\mu = \tan \theta$، فبيّن أن $F = W \tan (A + \theta)$.

للحل

24 **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، سوف تثبت عدم صحة الفرضية: $\sin(A + B) = \sin A + \sin B$.

a) **جدوليًا:** أكمل الجدول.

A	B	$\sin A$	$\sin B$	$\sin(A + B)$	$\sin A + \sin B$
$30°$	$90°$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$
$45°$	$60°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$
$90°$	$30°$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$



b) **بيانيًا:** افرض أن B أقل من A بـ $15°$ دائمًا، واستعمل الحاسبة البيانية لتمثل كلًا من: $y = \sin(x + x - 15)$، $y = \sin x + \sin(x - 15)$ على الشاشة نفسها.

c) **تحليليًا:** حدّد إذا كانت $\sin(A + B) = \sin A + \sin B$ متطابقة أم لا. فسر إجابتك.

$sin\ (45 + 60) = sin\ 45 + sin\ 60$
الطرف الأيمن يساوي 1.57 تقريبا. وبما أن قيمة جيب أية زاوية لا يمكن أن تكون أكبر من 1، فإن هذه الجملة الرياضية لا بد أن تكون خطأ.

للحل

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة:

25 $\sin(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{\sec A\sec B}$

26 $\cos(A+B)=\dfrac{1-\tan A\tan B}{\sec A\sec B}$

27 $\sec(A-B)=\dfrac{\sec A\sec B}{1+\tan A\tan B}$

28 $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B$

المتطابقات المثلثية
لضعف الزاوية ونصفها

3-4

تدرب وحل المسائل

الحل

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}$ ، إذا كان: (الأمثلة 1-3)

1 $\sin\theta = \frac{1}{4}; 0° < \theta < 90°$

$\cos 2\theta = \frac{7}{8}$ ، $\sin 2\theta = \frac{\sqrt{15}}{8}$

$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{4}$ ، $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{4}$

2 $\sin\theta = \frac{4}{5}; 90° < \theta < 180°$

$\cos 2\theta = -\frac{7}{25}$ ، $\sin 2\theta = -\frac{24}{25}$

$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ، $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

3 $\cos\theta = \frac{3}{5}; 270° < \theta < 360°$

$\cos 2\theta = -\frac{7}{25}$ ، $\sin 2\theta = -\frac{24}{25}$

$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ، $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

عودة لفهرس الفصل (3)

الحل

4 $\tan\theta = -\frac{8}{15}\ ; 90° < \theta < 180°$

$$\cos 2\theta = \frac{161}{289} \quad , \quad \sin 2\theta = -\frac{240}{289}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{17}}{17} \quad , \quad \sin\frac{\theta}{2} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$$

5 $\sin\theta = \frac{2}{3}\ ; 90° < \theta < 180°$

$$\cos 2\theta = \frac{1}{9} \quad , \quad \sin 2\theta = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{18-6\sqrt{5}}}{6} \quad , \quad \sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{6}$$

6 $\sin\theta = -\frac{15}{17}\ ; \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$$\cos 2\theta = \frac{-161}{289} \quad , \quad \sin 2\theta = \frac{240}{289}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{3\sqrt{34}}{34} \quad , \quad \sin\frac{\theta}{2} = \frac{5\sqrt{34}}{34}$$

7 $\tan\theta = -2\ ; \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

$$\cos 2\theta = \frac{-3}{5} \quad , \quad \sin 2\theta = \frac{-4}{5}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}} \quad , \quad \sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}}$$

للحل

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

8 $\sin \frac{\pi}{8}$ $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

9 $\cos 15°$ $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

10 $\sin 75°$ $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

11 $\tan 165°$ $\sqrt{3}-2$

12 $\tan \frac{5\pi}{12}$ $\sqrt{3}-2$

للحل

13 **كرة قدم:** ركل لاعب كرة قدم كرة بزاوية قياسها $37°$ مع سطح الأرض، وبسرعة ابتدائية متجهة مقدارها $52\,ft/s$. إذا كانت المسافة الأفقية d التي تقطعها الكرة تعطى بالصيغة $d = \frac{2v^2 \sin\theta\cos\theta}{g}$. حيث g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي $32\,ft/s^2$، و v تُمثّل السرعة الإبتدائية المتجهة. (مثال 4)

a) بسّط الصيغة مستعملًا المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

$$d = \frac{2v^2 \sin 2\theta}{g}.$$

b) ما المسافة الأفقية d التي تقطعها الكرة باستعمال الصيغة المبسّطة.

$81\,ft$ تقريباً.

للحل

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة: (مثال 5)

14 $\tan\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

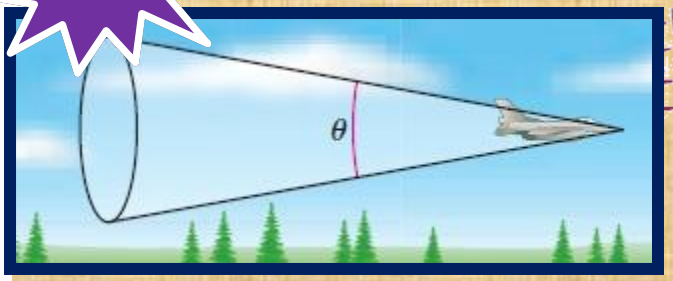
15 $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$

16 $\tan 2\theta = \dfrac{2}{\cot\theta - \tan\theta}$

17 $\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sin\theta}{2}$

للحل

18 **العدد ماخ:** ترتبط زاوية رأس المخروط الذي تشكله الأمواج الصوتية الناتجة عن اختراق الطائرة لحاجز الصوت بالعدد ماخ M بحسب العلاقة $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{M}$.



a) عبِّر عن قيمة العدد M بدلالة دالة جيب التمام.

$$\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\frac{1}{M}$$

b) إذا كان $\cos\theta=\frac{17}{18}$، فاستعمل التعبير الذي وجدته في **a** لحساب قيمة العدد ماخ.

6

19 **إلكترونيات:** يمر تيار متردد في دائرة كهربائية. إذا كانت شدة التيار الكهربائي I بالأمبير عند الزمن t ثانية هي $I_0\sin t\theta$، فإن القدرة P المرتبطة بالمقاومة R تعطى بالصيغة: $P=I_0^2R\sin^2 t\theta$.

عبِّر عن القدرة بدلالة $\cos 2t\theta$.

$$P=\frac{1}{2}I_0^2R-\frac{1}{2}I_0^2R\cos 2t\theta$$

للحل

20 **كرة قدم:** ركل حسن كرة قدم عدة مرات بسرعة متجهة إبتدائية مقدارها 95 ft/s .
برهن أن المسافة الأفقية التي قطعتها الكرة متساوية لكل من الزاويتين
$\theta = 45° + A, \theta = 45° - A$. استعمل الصيغة المعطاة في التمرين 13 .

أوجد القيم الدقيقة لكلٍّ من $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \tan 2\theta$ ، إذا كان:

21 $\cos\theta = \frac{4}{5}; 0° < \theta < 90°$

$\tan 2\theta = \frac{24}{7}$ ، $\cos 2\theta = \frac{7}{25}$ ، $\sin 2\theta = \frac{24}{25}$

22 $\sin\theta = \frac{1}{3}; 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\tan 2\theta = \frac{4\sqrt{2}}{7}$ ، $\cos 2\theta = \frac{7}{9}$ ، $\sin 2\theta = \frac{4\sqrt{2}}{9}$

23 $\tan\theta = -3; 90° < \theta < 180°$

$\tan 2\theta = \frac{3}{4}$ ، $\cos 2\theta = \frac{-4}{5}$ ، $\sin 2\theta = \frac{-3}{5}$

24 $\sec\theta = -\frac{4}{3}; 90° < \theta < 180°$

$\tan 2\theta = -3\sqrt{7}$ ، $\cos 2\theta = \frac{1}{8}$ ، $\sin 2\theta = \frac{-3\sqrt{7}}{8}$

25 $\cot\theta = \frac{3}{2}; 180° < \theta < 270°$

$\tan 2\theta = \frac{12}{5}$ ، $\cos 2\theta = \frac{5}{13}$ ، $\sin 2\theta = \frac{12}{13}$

للحل

26 **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذه المسألة كيفية إيجاد متطابقة مثلثية اعتمادًا على التمثيل البياني للدوال المثلثية.

a) **بيانيًّا:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $f(x)$ $(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4} - \cos\theta\sin\frac{\pi}{4})$ بيانيًّا في الفترة $-2\pi \le x \le 2\pi$.

b) **تحليليًّا:** اعتمد على التمثيل البياني في (a) لتخمين دالة بدلالة الجيب تطابق $f(x)$. ثم أثبت صحتها جبريًّا.

c) **بيانيًّا:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $g(x) = \cos^2(\theta - \frac{\pi}{3}) - \sin^2(\theta - \frac{\pi}{3})$ بيانيًّا في الفترة $-2\pi \le x \le 2\pi$.

d) **تحليليًّا:** اعتمد على التمثيل البياني في (c) لتخمين دالة بدلالة جيب التمام تطابق $g(x)$. ثم أثبت صحتها جبريًّا.

حل المعادلات المثلثية

3-5

تدرب وحل المسائل

الحل

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها : (مثال 1)

1. $\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = 0 \; ; 0° \le \theta \le 360°$ — 180°

2. $\cos 2\theta + \cos\theta = 0 \; ; 0° \le \theta \le 360°$ — 60° ، 180° ، 300°

3. $\cos 2\theta = 8 - 15\sin\theta \; ; 0° \le \theta \le 360°$ — 30° ، 150°

4. $\sin\theta + \cos\theta = 1 \; ; 0° \le \theta \le 360°$ — 0° ، 90°

عودة لفهرس الفصل (3)

للحل

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالراديان: (مثال 2)

5 $4\sin^2\theta - 1 = 0$

$\pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ، $\pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

6 $2\cos^2\theta = 1$

$\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

7 $\sin\frac{\theta}{2} + \cos\theta = 1$

$2k\pi$ ، $\frac{\pi}{3} + 4k\pi$ ، $\frac{5\pi}{3} + 4k\pi$

8 $\cos 2\theta + 4\cos\theta = -3$

$\pi + 2k\pi$

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات: (مثال 2)

9 $\cos 2\theta - \sin^2\theta + 2 = 0$

$90^o + k.180^o$

10 $\sin^2\theta - \sin\theta = 0$

$k.180^o$ ، $90^o + k.360^o$

11 $2\sin^2\theta - 1 = 0$

$45^o + k.90^o$

12 $\cos\theta - 2\cos\theta\sin\theta = 0$

$90^o + k.180^o$ ، $150^o + k.360^o$، $30^o + k.360^o$

للحل

13 **الليل والنهار:** إذا كان عدد ساعات النهار في إحدى المدن هو d، ويمكن تمثيلها بالمعادلة $d = 3 \sin \frac{2\pi}{365} t + 12$، حيث t عدد الأيام بعد 21 مارس. فأجب عما يأتي: (مثال 3)

a) في أي يوم سيكون عدد ساعات النهار في المدينة $10\frac{1}{2}$ h تمامًا؟

b) باستعمال النتيجة في الفرع **a**، ما أيام السنة التي يكون فيها عدد ساعات النهار $10\frac{1}{2}$ ساعات على الأقل؟ فسّر إجابتك.

للحل

حل كل معادلة مما يأتي: (المثالان 5 ,4)

14 $\sin^2 2\theta + \cos^2 \theta = 0$

$\frac{\pi}{2} + k\pi$

15 $\sin 2\theta - \cos \theta = 0$

$\frac{\pi}{2} + k\pi \quad , \quad \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

16 $\tan \theta = 1$

$45^o + k.180^o \quad , \quad \frac{\pi}{4} + k.\pi$

17 $\cos^2 \theta = \frac{1}{4}; 0^\circ \le \theta \le 360^\circ$

$60^o \quad , \quad 120^o \quad , \quad 240^o \quad , \quad 300^o$

18 $2\sin^2 \theta = 1; 90^\circ < \theta < 270^\circ$

$135^o \quad , \quad 225^o$

19 $\sin 2\theta - \cos \theta = 0; 0 \le \theta \le 2\pi$

$\frac{\pi}{6} \quad , \quad \frac{\pi}{2} \quad , \quad \frac{5\pi}{6} \quad , \quad \frac{3\pi}{2}$

20 $4\sin^2 \theta - 1 = 0; 180^\circ < \theta < 360^\circ$

$210^o \quad , \quad 330^o$

21 $\tan \theta - \sin \theta = 0$

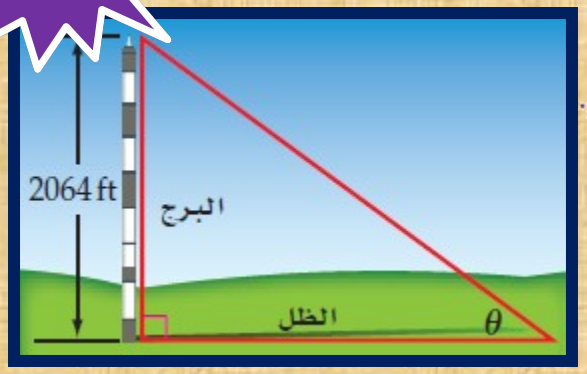
$0^o + k.180^o$

22 $4\sin^2 \theta = 4\sin \theta - 1$

$30^o + k.360^o \quad , \quad 150^o + k.360^o$

للحل

23 **الكترونيات:** يبلغ ارتفاع برج للبث التلفزيوني 2064 ft.
أوجد θ إذا كان طول ظله في الشكل أدناه 1 m؟



24 **أنهار:** تمثل الدالة: $y = 3 \sin\left[\frac{\pi}{6}(x-4)\right] + 8$، عمق نهر خلال أحد الأيام، حيث $x = 0, 1, 2, \ldots, 24$، 0 تدل على الساعة الثانية عشر منتصف الليل، 13 تدل على الساعة الواحدة بعد الظهر، وهكذا....

a) ما أقصى عمق للنهر في ذلك اليوم؟ 11 m

b) في أي وقت نحصل على أقصى عمق؟ 7 صباحاً، 7 مساءً

للحل

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان:

25 $(\cos\theta)(\sin 2\theta) - 2\sin\theta + 2 = 0$

$\frac{\pi}{2} + k\,.\,2\pi$

26 $2\sin^2\theta + (\sqrt{2} - 1)\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{5\pi}{4} + k\,.\,2\pi$ ، $\frac{7\pi}{4} + k\,.\,2\pi$ ،

$\frac{\pi}{6} + k\,.\,2\pi$ ، $\frac{5\pi}{6} + k\,.\,2\pi$

27 $2\sin\theta = \sin 2\theta$

$\pi\,.\,k$

حل المعادلتين الآتيتين، لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالدرجات:

28 $\sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$

29 $1 - \sin^2\theta - \cos\theta = \frac{3}{4}$

$240^o + k\,.\,360^o$ ، $120^o + k\,.\,360^o$

للحل

30 **ألماس:** حسب قانون سنيل (snell's law) $n_1 \sin i = n_2 \sin r$ ، حيث n_1 معامل الانكسار للضوء في الوسط الذي يخرج منه الضوء، و n_2 معامل الانكسار للوسط الذي يدخل فيه الضوء، و i قياس زاوية السقوط، و r قياس زاوية الانكسار.

a) إذا كان معامل الانكسار للماس 2.42، ومعامل الانكسار للهواء 1 . وقياس زاوية سقوط الضوء على حجر ألماس هو 35°، فما قياس زاوية الانكسار؟

b) اشرح كيف يستطيع بائع المجوهرات استعمال قانون سنيل؛ لمعرفة إذا كان هذا ألماسًا حقيقيًّا ونقيًّا أو لا.

الفصل (4)
القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

4-1

4-2

4-3

4-4

4-5

عودة لفهرس تدرب

4-1 القطوع المكافئة

تدرب وحل المسائل

الحل

حدّد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًّا: (مثال 1)

1 $(x-3)^2 = 12(y-7)$

1. الاتجاه: المنحنى مفتوح رأسيا إلى الأعلى
2. الرأس: $(3, 7)$
3. البؤرة: $(3, 10)$
4. معادلة محور التماثل: $x = 3$
5. معادلة الدليل: $y = 4$
6. طول الوتر البؤري: 12

2 $(x+1)^2 = -12(y-6)$

1. الاتجاه: المنحنى مفتوح رأسيا إلى الأسفل
2. الرأس: $(-1, 6)$
3. البؤرة: $(-1, 3)$
4. معادلة محور التماثل: $x = -1$
5. معادلة الدليل: $y = 9$
6. طول الوتر البؤري: 12

عودة لفهرس الفصل (4)

للحل

3 $(y-4)^2 = 20(x+2)$

1. الاتجاه: المنحنى مفتوح أفقياً إلى اليمين
2. الرأس: $(-2, 4)$
3. البؤرة: $(3, 4)$
4. معادلة محور التماثل: $y = 4$
5. معادلة الدليل: $x = -7$
6. طول الوتر البؤري: 20

4 $-40(x+4) = (y-9)^2$

1. الاتجاه: المنحنى مفتوح أفقياً إلى اليسار
2. الرأس: $(-4, 9)$
3. البؤرة: $(-14, 9)$
4. معادلة محور التماثل: $y = 9$
5. معادلة الدليل: $x = 6$
6. طول الوتر البؤري: 40

5 $(y+5)^2 = 24(x-1)$

1. الاتجاه: المنحنى مفتوح أفقياً إلى اليمين
2. الرأس: $(1, -5)$
3. البؤرة: $(7, -5)$
4. معادلة محور التماثل: $y = -5$
5. معادلة الدليل: $x = -5$
6. طول الوتر البؤري: 24

6 $-4(y+2) = (x+8)^2$

1. الاتجاه: المنحنى مفتوح رأسياً إلى الأسفل
2. الرأس: $(-8, -2)$
3. البؤرة: $(-8, -3)$
4. معادلة محور التماثل: $x = -8$
5. معادلة الدليل: $y = -1$
6. طول الوتر البؤري: 4

للحل

7 **لوح تزلج:** صمم بدر لوح تزلج مقطعه العرضي على شكل قطع مكافئ معادلته $x^2 = 8(y - 2)$، حيث x, y بالأقدام. كم المسافة بين بؤرة القطع المكافئ ودليله؟ (مثال 2)

4ft

8 **قوارب:** يُبحر قارب في الماء تاركًا وراءه أثرًا على شكل قطع مكافئ يلتقي رأسه مع نهاية القارب. ويمسك متزلـ يقف على لوح خشبي عند بؤرة القطع بحبل مثبت في القارب. ويمكن تمثيل القطع المكافئ الناتج من أثر القا بالمعادلة $y^2 - 180x + 10y + 565 = 0$، حيث x, y بالأقدام. (مثال 3)

a) اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية.

$(y + 5)^2 = 180(x - 3)$

b) ما طول الحبل الذي يمسك به المتزحلق؟

45ft

للحل

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدِّد خصائصه ومثِّله منحناه بيانيًّا: (مثال 3)

9 $x^2 - 17 = 8y + 39$

$x^2 = 8(y + 7)$

خصائص القطع:

1. الاتجاه: المنحنى مفتوح رأسيًا إلى الأعلى
2. الرأس: $(0, -7)$
3. البؤرة: $(0, -5)$
4. معادلة محور التماثل: $x = 0$
5. معادلة الدليل: $y = -9$
6. طول الوتر البؤري: 8

10 $y^2 + 33 = -8x - 23$

$y^2 = -8(y + 7)$

خصائص القطع:

1. الاتجاه: المنحنى مفتوح أفقيًا إلى اليسار
2. الرأس: $(-7, 0)$
3. البؤرة: $(-9, 0)$
4. معادلة محور التماثل: $y = 0$
5. معادلة الدليل: $x = -5$
6. طول الوتر البؤري: 8

11 $3x^2 + 72 = -72y$

$x^2 = -24(y + 1)$

خصائص القطع:

1. الاتجاه: المنحنى مفتوح رأسيًا إلى أسفل
2. الرأس: $(0, -1)$
3. البؤرة: $(0, -7)$
4. معادلة محور التماثل: $x = 0$
5. معادلة الدليل: $y = 5$
6. طول الوتر البؤري: 24

12 $60x - 80 = 3y^2 + 100$

$y^2 = 20(x - 3)$

خصائص القطع:

1. الاتجاه: المنحنى مفتوح أفقيًا إلى اليمين
2. الرأس: $(3, 0)$
3. البؤرة: $(8, 0)$
4. معادلة محور التماثل: $y = 0$
5. معادلة الدليل: $x = -2$
6. طول الوتر البؤري: 20

للحل

13 $-33 = x^2 - 12y - 6x$

$(x-3)^2 = 12(y-2)$

خصائص القطع :

❶	الاتجاه:	المنحنى مفتوح رأسيا إلى الأعلى
❷	الرأس:	$(3\ ,\ 2)$
❸	البؤرة:	$(3\ ,\ 5)$
❹	معادلة محور التماثل:	$x = 3$
❺	معادلة الدليل:	$y = -1$
❻	طول الوتر البؤري:	12

14 $-72 = 2y^2 - 16y - 20x$

$(y-4)^2 = 10(x-2)$

خصائص القطع :

❶	الاتجاه:	المنحنى مفتوح أفقيا إلى اليمين
❷	الرأس:	$(2\ ,\ 4)$
❸	البؤرة:	$(4.5\ ,\ 4)$
❹	معادلة محور التماثل:	$y = 4$
❺	معادلة الدليل:	$x = -0.5$
❻	طول الوتر البؤري:	10

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما ياتي : (مثال 4)

15 البؤرة $(-7, -9)$ ، والرأس $(-4, -9)$

$(x+9)^2 = -12(y+4)$

16 البؤرة $(3, 3)$ ؛ والمنحنى مفتوح إلى أعلى، ويمر بالنقطة $(23, 18)$.

$(x-3)^2 = 20(y+2)$

للحل

17 البؤرة $(2, -1)$، والرأس $(-4, -1)$

$$(y+1)^2 = 24(x+4)$$

18 البؤرة $(11, 4)$؛ والمنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمر بالنقطة $(20, 16)$.

$$(y-4)^2 = 12(x-8)$$

19 البؤرة $(-3, -2)$، والرأس $(1, -2)$

$$(y+2)^2 = -16(x-1)$$

20 المنحنى مفتوح رأسيًّا ويمر بالنقاط $(-12, -14), (0, -2), (6, -5)$.

$$x^2 = -12(y+2)$$

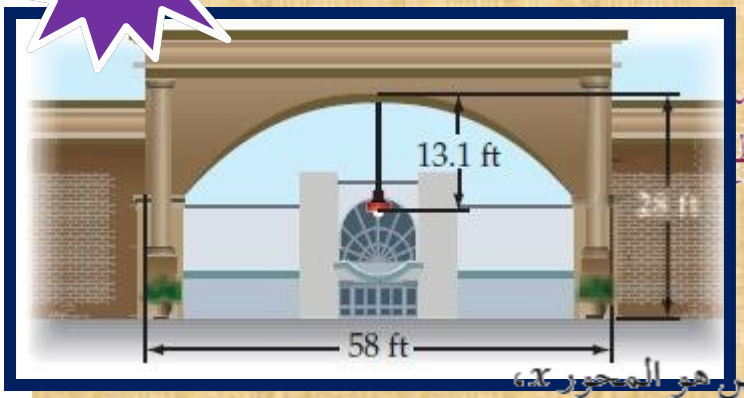
21 البؤرة $(-3, 4)$، والرأس $(-3, 2)$

$$(x+3)^2 = 8(y-2)$$

22 الرأس $(-3, 2)$، محور التماثل $y = 2$، طول الوتر البؤري 8 وحدات.

$$(y-2)^2 = 8(x+3) \quad \text{أو} \quad (y-2)^2 = -8(x+3)$$

للحل

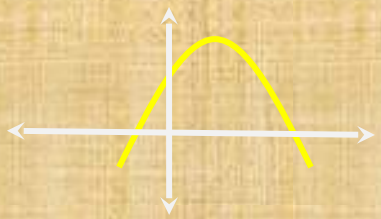


23 **عمارة:** أُنشئت قنطرة على شكل قطع مكافئ فوق بوابة س
بحيث ارتكزت فوق عمودين. وثبّت مصباح عند بؤرة القط
(مثال 4)

a) اكتب معادلة القطع المكافئ. افترض أن مستوى الأرض هو المحور x،
والعمود الأيسر ينطبق على المحور y.

$$(x-9)^2 = -52.4(y-28)$$

b) مثّل منحنى القطع المكافئ بيانيًّا.



للحل

اكتب معادلة مماس منحنى كل قطع مكافئ مما يأتي عند النقطة المعطاة: (مثال 5)

24 $(x+7)^2 = -\frac{1}{2}(y-3)$ ؛ $(-5,-5)$

$y = -8x - 45$

25 $y^2 = \frac{1}{5}(x-4)$ ؛ $(24,2)$

$y = \frac{1}{20}x + \frac{4}{5}$

26 $(x+6)^2 = 3(y-2)$ ؛ $(0,14)$

$y = 4x + 14$

27 $-4x = (y+5)^2$ ؛ $(0,-5)$

$x = 0$

حدّد اتجاه فتحة منحنى القطع المكافئ المعطاة بعض خصائصه في كل مما يأتي:

28 الدليل $y = 4$ وَ $p = -2$

مفتوح إلى أسفل

29 $y^2 = -8(x-6)$

مفتوح إلى اليسار

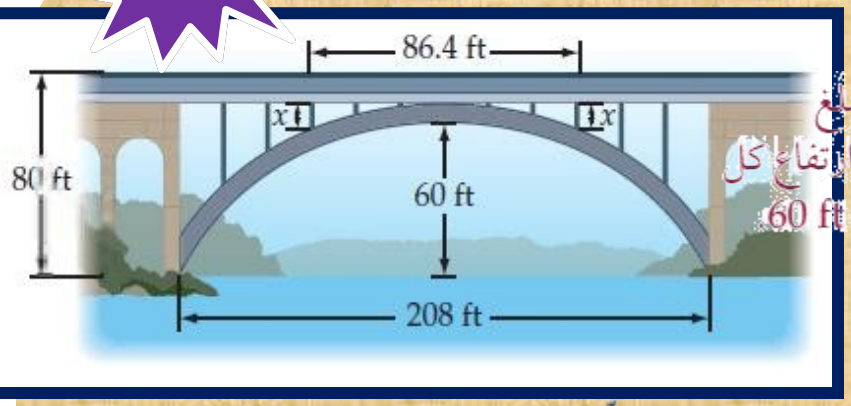
30 الرأس $(-5,1)$ والبؤرة $(-5,3)$

مفتوح إلى أعلى

31 البؤرة $(7,10)$ والدليل $x = 1$

مفتوح إلى اليمين

للحل



32 **جسور:** يأخذ القوس أسفل الجسر شكل قطع مكافئ. وتبلغ المسافة بين البرجين الواقعين على طرفي القوس 208 ft وارتفاع كل منهما 80 ft. وتبلغ المسافة من قمة القوس إلى سطح الماء 60 ft.

a) اكتب معادلة تمثّل شكل القوس مفترضًا أن مسار الطريق على الجسر يمثّل المحور x.

$$x^2 = -180.27(y + 20)$$

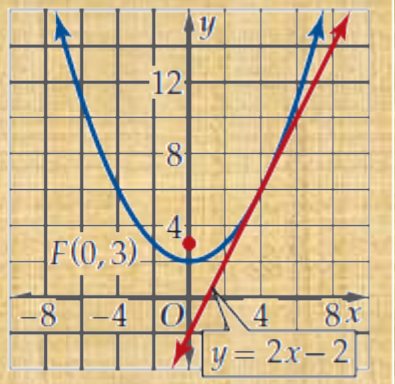
b) توجد دعامتان رأسيتان للقوس تبعدان المسافة نفسها عن رأس القوس كما هو موضّح في الشكل. أوجد طول كل منهما إذا كانت المسافة بينهما 86.4 ft.

$30.35m$ تقريباً

الحل

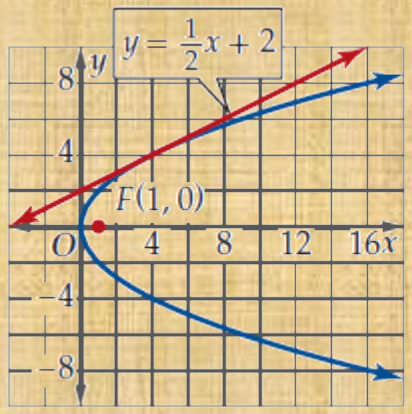
اكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته F، ويمس المستقيم المعطى منحناه في كل مما يأتي:

33



$x^2 = 4(y - 2)$

34



$y^2 = 4x$

للحل

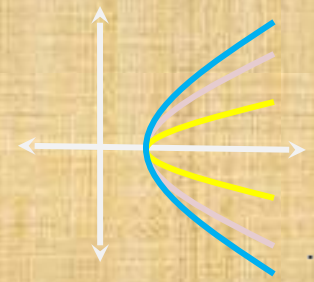
35

تمثيلات متعددة: ستكشف في هذه المسألة تغير شكل القطع المكافئ تبعًا لتغير موقع البؤرة.

a) **هندسيًا:** أوجد البعد بين الرأس والبؤرة لكل قطع مكافئ مما يأتي:

i) $y^2 = 4(x-2)$ ii) $y^2 = 8(x-2)$ iii) $y^2 = 16(x-2)$

i) وحدة واحدة ii) وحدتين iii) 4 وحدات



b) **بيانيًا:** مثّل منحنى كل قطع مكافئ في فرع a بيانيًا باستعمال لون مختلف لكل منها. ثم عيّن بؤرة كل منها.

c) **لفظيًا:** صف العلاقة بين شكل القطع المكافئ والمسافة بين الرأس والبؤرة.

عندما تتحرك البؤرة بعيداً عن الرأس يزداد توسع منحنى القطع المكافئ راسيا.

d) **تحليليًا:** اكتب معادلة قطع مكافئ يشترك في الرأس مع القطع المكافئ الذي معادلته $(x+1)^2 = 20(y+7)$ ولكنه $(x+1)^2 = 4(y+7)$

e) **تحليليًا** كوّن تخمينًا حول منحنى كل قطع مكافئ مما يأتي: $x^2 = -5(y+1)$ ، $x^2 = -2(y+1), x^2 = -12(y+1)$ ثم تحقّق من تخمينك بتمثيل منحنى كل منها بيانيًّا.

جميع القطوع المكافئة لها الرأس (-1 , 0) ومنحناها مفتوحة إلى الأسفل. منحنى المعادلة $x^2 = -2(y+1)$ هو الأضيق، في حين ان منحنى المعادلة $x^2 = -12(y+1)$ هو الأوسع.

القطوع الناقصة والدوائر

4-2

تدرب وحل المسائل

الحل

حدد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا. (مثال 1)

1 $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{y^2}{49}=1$

❶ الاتجاه: رأسي

❷ المركز: $(-2,0)$

❸ **المحور الأكبر:**

* البؤرتان: $(-2,\pm 2\sqrt{2})$
* الرأسان: $(-2,\pm 7)$
* معادلته: $x=-2$

❹ **المحور الأصغر:**

* الرأسان المرافقان: $(1,0),(-5,0)$
* معادلته: $y=0$

2 $\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$

❶ الاتجاه: أفقي

❷ المركز: $(-4,-3)$

❸ **المحور الأكبر:**

* البؤرتان: $(-4\pm\sqrt{5},-3)$
* الرأسان: $(-7,-3),(-1,-3)$
* معادلته: $y=-3$

❹ **المحور الأصغر:**

* الرأسان المرافقان: $(-4,-1),(-4,-5)$
* معادلته: $x=-4$

عودة لفهرس الفصل (4)

للحل

3 $x^2 + 9y^2 - 14x + 36y + 49 = 0$

1. الاتجاه: أفقي
2. المركز: $(2, -7)$
3. **المحور الأكبر:**
   * البؤرتان: $(2 \pm 4\sqrt{2}, -7)$
   * الرأسان: $(1, -7)$ ، $(13, -7)$
   * معادلته: $y = -7$
4. **المحور الأصغر:**
   * الرأسان المرافقان: $(0, -4)$ ، $(4, -7)$
   * معادلته: $x = 4$

4 $4x^2 + y^2 - 64x - 12y + 276 = 0$

1. الاتجاه: رأسي
2. المركز: $(8, 6)$
3. **المحور الأكبر:**
   * البؤرتان: $(8, 6 \pm 2\sqrt{3})$
   * الرأسان: $(8, 2)$ ، $(8, 10)$
   * معادلته: $x = 8$
4. **المحور الأصغر:**
   * الرأسان المرافقان: $(6, 6)$ ، $(10, 6)$
   * معادلته: $y = 6$

الحل

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 2)

5 الرأسان $(13, -3), (-7, -3)$، والبؤرتان $(11, -3), (-5, -3)$

$$\frac{(x-3)^2}{100} + \frac{(y+3)^2}{36} = 1$$

6 الرأسان $(4, -9), (4, 3)$، وطول المحور الأصغر 8

$$\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{36} = 1$$

7 نهايتا المحور الأكبر $(1, 2), (-13, 2)$، ونهايتا المحور الأصغر $(-6, 0), (-6, 4)$.

$$\frac{(x+6)^2}{49} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

8 البؤرتان $(-6, -3), (-6, 9)$، وطول المحور الأكبر 20 وحدة.

$$\frac{(x+6)^2}{49} + \frac{(y-3)^2}{100} = 1$$

9 الرأسان المرافقان $(-3, 7), (-13, 7)$، وطول المحور الأكبر 16 وحدة.

$$\frac{(x+8)^2}{25} + \frac{(y-7)^2}{64} = 1$$

الحل

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في كل ما يأتي: (مثال 3)

10 $\frac{(x+5)^2}{72}+\frac{(y-3)^2}{54}=1$

$e=0.5$

11 $\frac{(x+6)^2}{40}+\frac{(y-2)^2}{12}=1$

$e=0.837$

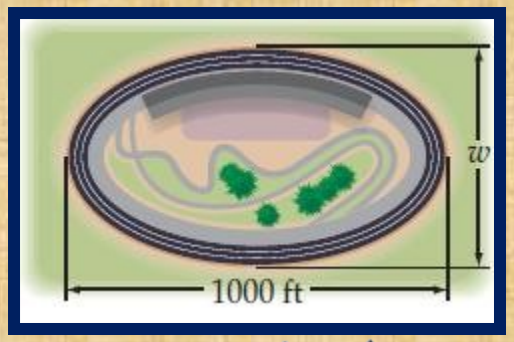
12 $\frac{(x-8)^2}{14}+\frac{(y+3)^2}{57}=1$

$e=0.869$

13 $\frac{(x+8)^2}{27}+\frac{(y-7)^2}{33}=1$

$e=0.426$

14 **سباق:** يوضّح الشكل المجاور مضمار سباق على شكل قطع ناقص اختلافه المركزي 0.75. (مثال 4)



a) ما أقصى عرض w لمضمار السباق؟

$661.44ft$

b) اكتب معادلة القطع الناقص إذا كانت نقطة الأصل هي مركز المضمار.

$\frac{x^2}{250000}+\frac{y^2}{109375}=1$

الحل

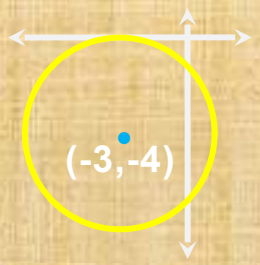
اكتب معادلة الدائرة التي تحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثل منحناها بيانيًا. (مثال 5)

15 المركز $(3, 0)$، و نصف القطر 2.

$(x-3)^2+y^2=4$

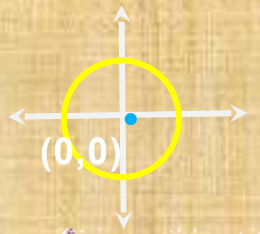
16 المركز $(-3, -4)$، والقطر 8 .

$(x+4)^2+(y+3)^2=36$



17 المركز هو نقطة الأصل، ونصف القطر 7 .

$x^2+y^2=49$



اكتب معادلة الدائرة المعطى طرفا قطر فيها في كل مما يأتي: (مثال 6)

18 $(2, 1)$, $(2, -4)$

$(x-2)^2+(y+\frac{3}{2})^2=\frac{25}{4}$

19 $(-4, -10)$, $(4, -10)$

$x^2+(y+10)^2=16$

20 $(5, -7)$, $(-2, -9)$

$(x-\frac{3}{2})^2+(y+8)^2=\frac{53}{4}$

21 $(-6, 4)$, $(4, 8)$

$(x+1)^2+(y-6)^2=29$

الحل

22 **معادلات:** استنتج الصورة العامة لمعادلة القطع الناقص الذي محوره الأكبر رأسي، ومركزه نقطة الأصل.

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

23 بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس، إذا كان قطر الشمس 870000 ميل تقريبًا، فأجب عما يأتي:

a) أوجد طول المحور الأصغر لمدار كوكب عطارد.

71.35 مليون ميل تقريباً

b) أوجد الاختلاف المركزي للمدار.

0.203

للحل

أوجد المركز والبؤرتين والرأسين لكل قطع ناقص مما يأتي:

24 $\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

❶ المركز: $(-5, 0)$

❷ البؤرتان: $(-2, 0)، (-8, 0)$

❸ الرأسان: $(-1, 0)، (-9, 0)$

25 $9y^2 - 18y + 25x^2 + 100x - 116 = 0$

❶ المركز: $(-2, 1)$

❷ البؤرتان: $(-2, -3)، (-2, 5)$

❸ الرأسان: $(-2, -4)، (-2, 6)$

26 $65x^2 + 16y^2 + 130x - 975 = 0$

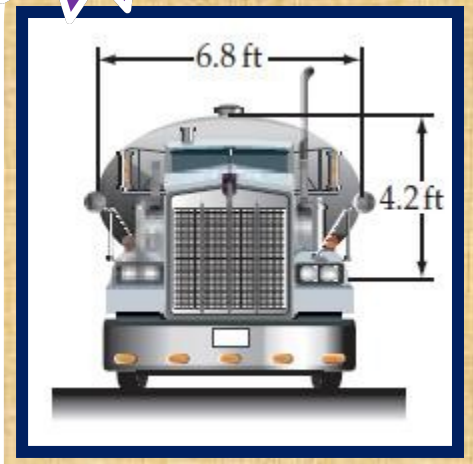
❶ المركز: $(-1, 0)$

❷ البؤرتان: $(-1, -7)، (-1, 7)$

❸ الرأسان: $(-1, -\sqrt{65})، (-1, \sqrt{65})$

للحل

27 **شاحنات:** تستعمل في شاحنات نقل السوائل خزانات مقطعها العرضي على شكل قطع ناقص؛ لأنها أكثر ثباتًا من الخزانات الأسطوانية، ويكون السائل فيها أقل حركة.



a) ارسم المقطع العرضي لخزان الشاحنة أعلاه على مستوى إحداثي.

b) اكتب معادلة تمثل شكل المقطع العرضي للخزان.

$$\frac{x^2}{11.56} + \frac{y^2}{4.41} = 1$$

c) أوجد الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي يمثل المقطع العرضي للخزان.

0. 79

للحل

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

28 الرأسان $(10, 0), (-10, 0)$ والاختلاف المركزي $\frac{3}{5}$

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

29 الرأسان المرافقان $(6, 1), (0, 1)$، والاختلاف المركزي $\frac{4}{5}$.

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$$

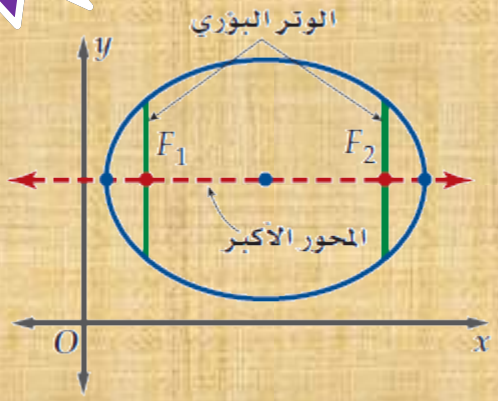
30 المركز $(2, -4)$ وإحدى البؤرتين $(2, -4 + 2\sqrt{5})$، والاختلاف المركزي $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$$\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$$

للحل

31 الوتر البؤري للقطع الناقص هو قطعة مستقيمة تمر بإحدى البؤرتين، وتعامد المحور الأكبر، ويقع طرفاها على منحنى القطع. ويساوي طولها $\frac{2b^2}{a}$ وحدة، حيث a نصف طول المحور الأكبر، b نصف طول المحور الأصغر.

اكتب معادلة قطع ناقص أفقي مركزه (3, 2)، وطول محوره الأكبر 16 وحدة، وطول وتره البؤري 12 وحدة.



$$\frac{(x-3)^2}{64} + \frac{(y-2)^2}{48} = 1$$

للحل

32 **هندسة :** تتقاطع المستقيمات $x - 5y = -3,\ 2x + 3y = 7,\ 4x - 7y = 27$ لتشكل مثلثا.
اكتب معادلة الدائرة التي تمر برؤوس المثلث.

$$(x - 6.5)^2 + (y - 4.5)^2 = 32.5$$

اكتب الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي تمرّ بالنقاط المعطاة في كل مما يأتي :

33 $(2, 3), (8, 3), (5, 6)$

$(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 9$

34 $(1, -11), (-3, -7), (5, -7)$

$(x - 1)^2 + (y + 7)^2 = 16$

35 $(0, 9), (0, 3), (-3, 6)$

$x^2 + (y - 6)^2$

36 $(7, 4), (-1, 12), (-9, 4)$

$(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 64$

4-3 القطوع الزائدة

تدرب وحل المسائل

للحل

حدد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا: (مثال 1)

1 $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{17} = 1$

1. الاتجاه: رأسي
2. المركز: $(0, 0)$
3. الرأسان: $(0, \pm 2)$
4. البؤرتان: $(0, \pm\sqrt{21})$
5. خطا التقارب: $y = \pm \frac{2\sqrt{17}}{17}x$

2 $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{30} = 1$

1. الاتجاه: أفقي
2. المركز: $(0, 0)$
3. الرأسان: $(\pm 7, 0)$
4. البؤرتان: $(\pm\sqrt{79}, 0)$
5. خطا التقارب: $y = \pm \frac{\sqrt{30}}{7}x$

عودة لفهرس الفصل (4)

للحل

3 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{21} = 1$

1. الاتجاه: أفقي
2. المركز: $(0\ ,0)$
3. الرأسان: $(\pm 3\ ,0)$
4. البؤرتان: $(\pm\sqrt{30}\ ,0)$
5. خطا التقارب: $y = \pm\frac{\sqrt{21}}{3}x$

4 $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{14} = 1$

1. الاتجاه: رأسي
2. المركز: $(0\ ,0)$
3. الرأسان: $(0\ ,\pm 5)$
4. البؤرتان: $(0\ ,\pm\sqrt{39})$
5. خطا التقارب: $y = \pm\frac{5\sqrt{14}}{14}x$

5 $3x^2 - 2y^2 = 12$

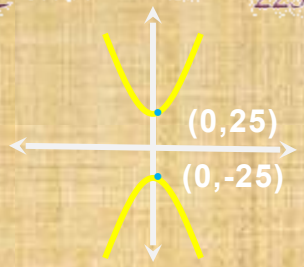
1. الاتجاه: أفقي
2. المركز: $(0\ ,0)$
3. الرأسان: $(\pm 2\ ,0)$
4. البؤرتان: $(\pm\sqrt{10}\ ,0)$
5. خطا التقارب: $y = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}x$

6 $3y^2 - 5x^2 = 15$

1. الاتجاه: رأسي
2. المركز: $(0\ ,0)$
3. الرأسان: $(0\ ,\pm\sqrt{5})$
4. البؤرتان: $(0\ ,\pm 2\sqrt{2})$
5. خطا التقارب: $y = \pm\frac{\sqrt{15}}{3}x$

الحل

7 **إضاءة:** يمكن تمثيل الضوء المنعكس من مصباح طاولة على جدار بقطع زائد معادلته $\frac{y^2}{225} - \frac{x^2}{81} = 1$. مثّل منحنى القطع الزائد بيانيًّا. (مثال 1)



اكتب معادلة كل قطع زائد مما يأتي على الصورة القياسية ثم حدد خصائصه، ومثّل منحناه بيانيًّا: (مثال 2)

8 $x^2 - 4y^2 - 6x - 8y = 27$

$\frac{(x-3)^2}{32} - \frac{(y+1)^2}{8} = 1$

خصائص القطع:

1. الاتجاه: أفقي
2. المركز: $(3, -1)$
3. الرأسان: $(3 \pm 4\sqrt{2}, -1)$
4. البؤرتان: $(3 \pm 2\sqrt{10}, -1)$
5. خطا التقارب: $y + 1 = \pm 2(x - 3)$

9 $-x^2 + 3y^2 - 4x + 6y = 28$

$\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{27} = 1$

خصائص القطع:

1. الاتجاه: رأسي
2. المركز: $(-2, -1)$
3. الرأسان: $(-2, -4)$ ، $(-2, 2)$
4. البؤرتان: $(-2, -7)$ ، $(-2, 5)$
5. خطا التقارب: $y + 1 = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 2)$

الحل

10 $-5x^2 + 2y^2 - 70x - 8y = 287$

$$\frac{(y-2)^2}{25} - \frac{(x+7)^2}{10} = 1$$

خصائص القطع :

1. الاتجاه: رأسي
2. المركز: $(-7, 2)$
3. الرأسان: $(-7, 7)$ ، $(-7, -3)$
4. البؤرتان: $(-7, 2 \pm \sqrt{35})$
5. خطا التقارب: $y - 2 = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}(x + 7)$

11 $9y^2 - 4x^2 - 54y + 32x - 19 = 0$

$$\frac{(y-3)^2}{4} - \frac{(x-4)^2}{9} = 1$$

خصائص القطع :

1. الاتجاه: رأسي
2. المركز: $(4, 3)$
3. الرأسان: $(4, 5)$ ، $(4, 1)$
4. البؤرتان: $(4, 3 \pm \sqrt{13})$
5. خطا التقارب: $y - 3 = \pm \frac{2}{3}(x - 4)$

12 $16x^2 - 9y^2 + 128x + 36y + 76 = 0$

$$\frac{(x+4)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$

خصائص القطع :

1. الاتجاه: أفقي
2. المركز: $(-4, 2)$
3. الرأسان: $(-7, 2)$ ، $(-1, 2)$
4. البؤرتان: $(1, 2)$ ، $(-9, -2)$
5. خطا التقارب: $y - 2 = \pm \frac{4}{3}(x + 4)$

للحل

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 3)

13 البؤرتان $(-1, -7), (-1, 9)$، وطول المحور المرافق 14 وحدة.

$$\frac{(y-1)^2}{15} - \frac{(x+1)^2}{49} = 1$$

14 الرأسان $(-5, 5), (7, 5)$، والبؤرتان $(-9, 5), (11, 5)$.

$$\frac{(x-1)^2}{36} - \frac{(y-5)^2}{64} = 1$$

15 الرأسان $(-1, 3), (-1, 9)$، وخطا التقارب $y = \pm\frac{3}{7}x + \frac{45}{7}$.

$$\frac{(y-6)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{49} = 1$$

16 البؤرتان $(-17, 7), (9, 7)$، وخطا التقارب $y = \pm\frac{5}{12}x + \frac{104}{12}$.

$$\frac{(x+4)^2}{144} - \frac{(y-7)^2}{25} = 1$$

الحل

17 المركز $(-7, 2)$، وأحد خطي التقارب $y = \frac{7}{5}x + \frac{59}{5}$، والمحور القاطع أفقيًّا وطوله 10 وحدات.

$$\frac{(x+7)^2}{25} - \frac{(y-2)^2}{7} = 1$$

18 الرأسان $(2, -2), (2, 10)$، وطول المحور المرافق 16 وحدة.

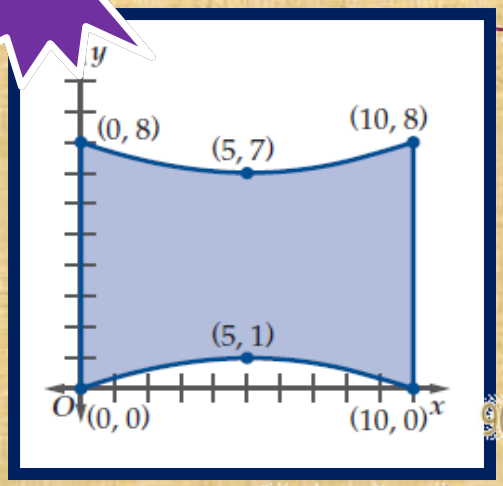
$$\frac{(y-4)^2}{36} - \frac{(x-2)^2}{64} = 1$$

19 الاختلاف المركزي $\frac{7}{6}$ والبؤرتان عند $(13, -2), (-1, -2)$.

$$\frac{(x-6)^2}{36} - \frac{(y+2)^2}{13} = 1$$

للحل

20 **هندسة معمارية:** يبيّن الشكل المجاور مخطّط أرضية مكتب



a) اكتب معادلة تمثل فرعي المنحنى في الشكل.

$$\frac{(y-4)^2}{9} - \frac{(x-5)^2}{\frac{225}{7}} = 1$$

b) إذا كانت كل وحدة في المستوى الإحداثي تمثل 1 ft، فما أقصر عرض لأرضية المكتب؟ (مثال 3)

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي: (مثال 4)

21 $\frac{(y-1)^2}{10} - \frac{(x-6)^2}{13} = 1$

1.52

22 $\frac{(x+4)^2}{24} - \frac{(y+1)^2}{15} = 1$

1.27

23 $\frac{(x-3)^2}{38} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$

1.06

24 $\frac{(y+2)^2}{32} - \frac{(x+5)^2}{25} = 1$

1.33

25 $3x^2 - 2y^2 + 12x - 12y = 42$

1.52

26 $-x^2 + 7y^2 + 24x + 70y = -24$

2.83

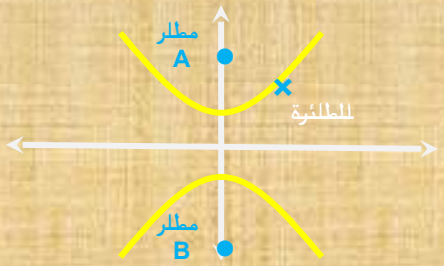
للحل

27 **طيران:** يقع المطاران A , B على بعد 72 km كل منهما عن الآخر، بحيث يقع المطار B جنوب A. وعند لحظة ما كان بعد طائرة عن المطار B يزيد بمقدار 18 km عن بعدها عن المطار A. (مثال 5)

a) اكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل، ويقع المطاران عند بؤرتيه، وتقع الطائرة على منحناه عند تلك اللحظة.

$$\frac{y^2}{81} - \frac{x^2}{1215} = 1$$

b) مثّل منحنى القطع الزائد بيانيًّا مع توضيح فرع القطع الذي تقع عليه الطائرة عند تلك اللحظة.



c) إذا كانت الطائرة في تلك اللحظة على بعد 40 km شرق كلا المطارين، فأوجد إحداثيي موقع الطائرة. (40 , 13.7)

للحل

28 **هندسة معمارية:** يأخذ برج "كوب بورت" في اليابان شكل مجسم ناتج عن دوران قطع زائد حول محوره المرافق. افترض أن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي نتج عن دوران البرج تساوي 19.

a) إذا كان أقصر عرض للبرج هو 8 m، فما معادلة القطع الزائد؟

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{5760} = 1$$

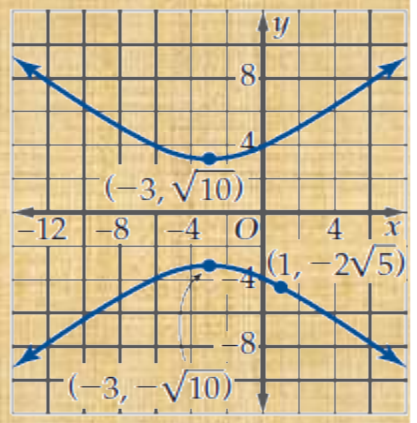
b) إذا كان ارتفاع قمة البرج عن مركز القطع الزائد هو 32 m، وانخفاض القاعدة عن المركز هو 76 m، فأوجد نصف قطر القمة ونصف قطر القاعدة.

نصف قطر القمة 4.3m تقريباً ونصف قطر القاعدة 5.7m تقريباً

للحل

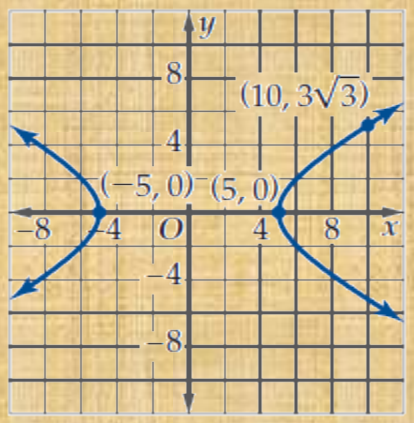
اكتب معادلة القطع الزائد الممثل بيانيًّا في كل مما يأتي:

29



$$\frac{y^2}{10} - \frac{(x+3)^2}{16} = 1$$

30



$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$$

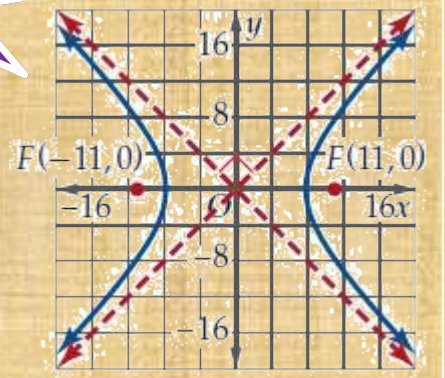
31 **طقس:** يقف محمد وعلي في مكانين، البعد بينهما 4000 ft. إذا علمت أن الفرق الزمني بين سماع محمد لصوت رعد وسماع علي هو 3 sec، وأن سرعة الصوت 1100 ft/sec، فأوجد معادلة القطع الزائد الأفقي الذي يقع عليه مصدر البرق.

$$\frac{x^2}{2722500} - \frac{y^2}{1277500} = 1$$

للحل

32

يتشكل القطع الزائد المتساوي الساقين عندما يكون خطا تقاربه متعامدين، و $a = b$ عند كتابة معادلته على الصورة القياسية. اكتب معادلة القطع الزائد الممثل بيانيًا أدناه.



$$\frac{2x^2}{121} - \frac{2y^2}{121} = 1$$

للحل

33 **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذه المسألة نوعًا خاصًّا من القطوع الزائدة يسمّى القطع الزائد المرافق.
ويظهر هذا القطع عندما يكون المحور المرافق لقطع زائد هو المحور القاطع لقطع زائد آخر.

a) **بيانيًا:** مثّل منحنى القطع $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ ومنحنى القطع $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$ على المستوى الإحداثي نفسه.

b) **تحليليًّا** قارن بين المنحنيين من حيث: البؤرتان، الرأسان، خطا التقارب.

البؤرتان للمنحنى الأول ، هما: (0 , 10-),(0 , 10) والبؤرتان للمنحنى الثاني هما (0,-10),(0,10). والرأسان للمنحنى الأول هما: (6,0-)(6,0) والرأسان للمنحنى الثاني هما: (0,-6),(0,6) والمنحنيان لهما نفس خطي التقارب.

c) **تحليليًّا:** اكتب معادلة القطع الزائد المرافق للقطع الذي معادلته $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

d) **بيانيًا:** مثل منحنيي القطعين.

e) **لفظيًا:** كوّن تخمينًا حول تشابه القطعين الزائدين المترافقين.

القطعان الزائدان المترافقان لهما نفس البعد بين المركز والبؤرتين في كل منهما.

تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها

4-4

تدرب وحل المسائل

الحل

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله، ومثِّل منحناه بيانيًا. (مثال 1)

1 $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y - 11 = 0$

2 $x^2 + y^2 + 12x - 8y + 36 = 0$

عودة لفهرس الفصل (4)

للحل

3 $9y^2 - 16x^2 - 18y - 64x - 199 = 0$

4 $6y^2 - 24y + 28 - x = 0$

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية. (مثال 2)

5 $4x^2 - 5y = 9x - 12$

6 $5y^2 = 2x + 6y - 8 + 3x^2$

$4x^2 - 6y = 8x + 2$ 8

$8x^2 + 8y^2 + 16x + 24 = 0$ 7

$5xy - 3x^2 + 6y^2 + 12y = 18$ 10

$4x^2 - 3y^2 + 8xy - 12 = 2x + 4y$ 9

$16xy + 8x^2 + 8y^2 - 18x + 8y = 13$ 11

الحل

12 **طيران:** في أحد عروض الطيران يمكن تمثيل مسار طائرة نفاثة خلال جولة واحدة، بقطع مخروطي وفق المعادلة $24x^2 + 1000y - 31680x - 45600 = 0$، وقد حدّدت الأبعاد بالأقدام. (مثال 2)

a) حدّد شكل منحنى القطع الذي يمثّل مسار الطائرة، ثم اكتب معادلته على الصورة القياسية.

b) إذا بدأت الطائرة بالصعود عند $x = 0$، فما المسافة الأفقية التي تقطعها من بداية صعودها إلى نهاية هبوطها؟

c) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الطائرة؟

الحل

استعمل قيمة θ المعطاة لكتابة الصورة القياسية لكل معادلة مما يأتي في المستوى $x'y'$، ثم حدّد نوع القطع المخروطي التي تمثله: (مثال 3)

13 $x^2 - y^2 = 9; \theta = \frac{\pi}{3}$

14 $xy = -8; \theta = 45°$

15 $x^2 - 8y = 0; \theta = \frac{\pi}{2}$

16 $2x^2 + 2y^2 = 8; \theta = \frac{\pi}{6}$

17 $y^2 + 8x = 0; \theta = 30°$

18 $4x^2 + 9y^2 = 36; \theta = 30°$

للحل

اكتب معادلة القطع المخروطي لكل مما يأتي في المستوى xy بناءً على معادلته المعطاة في المستوى $x'y'$ والزاوية θ : (مثال 4)

19 $(x')^2 + 3(y')^2 = 8; \theta = \frac{\pi}{4}$

20 $\frac{(x')^2}{25} - \frac{(y')^2}{225} = 1; \theta = \frac{\pi}{4}$

21 $\frac{(x')^2}{9} - \frac{(y')^2}{36} = 1; \theta = \frac{\pi}{3}$

22 $(x')^2 = 8y'; \theta = 45°$

23 $\frac{(x')^2}{7} + \frac{(y')^2}{28} = 1; \theta = \frac{\pi}{6}$

24 $4x' = (y')^2; \theta = 30°$

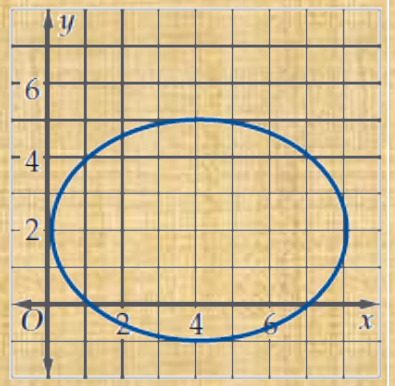
25 $\frac{(x')^2}{64} - \frac{(y')^2}{16} = 1; \theta = 45°$

26 $(x')^2 = 5y'; \theta = \frac{\pi}{3}$

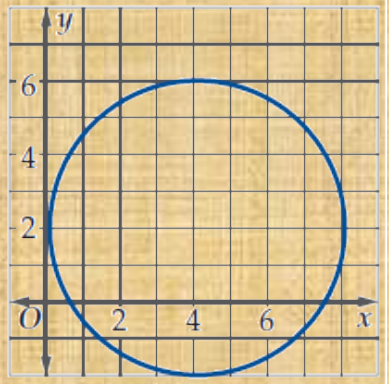
للحل

قابل بين المنحنيات أدناه والمعادلة التي تمثل كل منها:

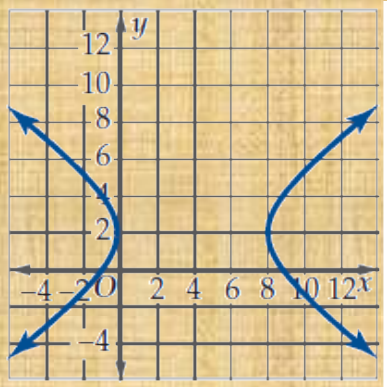
27



28



29



(a $x^2 + y^2 - 8x - 4y = -4$

(b $9x^2 - 16y^2 - 72x + 64y = 64$

(c $9x^2 + 16y^2 = 72x + 64y - 64$

للحل

30 **ضوء:** ينعكس ضوء مصباح على حائط مشكّلًا قطعًا مخروطيًا. افترض أن معادلة القطع هي $3y^2 - 2y - 4x^2 + 2x - 8 = 0$. حدّد نوع القطع، ومثّل منحناه بيانيًا.

قابل بين كل حالة في التمارين 22-19 مع المعادلة التي تمثلها من a-d

a $47.25x^2 - 9y^2 + 18y + 33.525 = 0$

b $25x^2 + 100y^2 - 1900x - 2200y + 45700 = 0$

c $16x^2 - 90x + y - 0.25 = 0$

d $x^2 + y^2 - 18x - 30y - 14094 = 0$

الحل

31 **حاسوب:** حدود شبكة لاسلكية مداها 120 ft .

32 **لياقة:** المسار البيضي لقدميك على جهاز التمرين.

33 **اتصالات:** موقع هاتف محمول بين عمودي إرسال.

34 **رياضة:** ارتفاع كرة قدم عن الأرض بعد ركلها.

للحل

35 **تمثيلات متعددة:** افترض أن مركز قطع ناقص $(3, -2)$، وأحد رأسيه $M(-1, -2)$، وأحد الرأسين المرافقين $N(3, -4)$.

a) **تحليليًا:** أوجد الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص.

b) **جبريًا:** حوّل المعادلة في الفرع **a** إلى الصورة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

c) **بيانيًا:** مثّل معادلة القطع الناقص بيانيًا.

d) **جبريًا:** استعمل $\theta = 45°$ لكتابة الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص التي أوجدتها في **(b)** في المستوى $x'y'$.

d) **بيانيًا:** مثّل معادلة القطع الناقص الدوراني بيانيًا.

المعادلات الوسيطية

4-5

تدرب وحل المسائل

الحل

مثّل بيانيًا المنحنى المعطى بالمعادلتين الوسيطيتين على الفترة المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 1)

1 $x = t^2 + 3, y = \frac{t}{4} - 5; -5 \le t \le 5$

2 $x = \frac{t^2}{2}, y = -4t; -4 \le t \le 4$

عودة لفهرس الفصل (4)

للحل

$x = -2t^2, y = \frac{t}{3} - 6; -5 \le t \le 5$ **3**

$x = \frac{t}{2}, y = -\sqrt{t} + 5; 0 \le t \le 8$ **4**

$x = t^2 - 4, y = 3t - 8; -5 \le t \le 5$ **5**

للحل

اكتب كل معادلتين وسيطيتين فيما يأتي بالصورة الديكارتية، ثم مثّل المنحنى بيانيًّا، وحدِّد المجال: (المثالان 2, 3)

6 $y = t^2 - 7, x = 3t + 9$

7 $y = 5t, x = t^2 - 2$

8 $y = -4t + 3, x = t^2 + 1$

9 $y = 2t^2 + 8, x = 5t - 1$

10 $y = \frac{6t}{5} + 9, x = 4t^2$

11 $y = \frac{t^2}{6} - 7, x = \frac{t}{3} + 2$

12 **ألعاب بهلوانية:** قفز مهرج من على برج ممسكًا بحبل، فكان ارتفاعه بعد t ثانية ويُعطى بالمعادلة $y = \frac{45t - 1}{t}$، والمسافة الأفقية التي قطعها بعد t ثانية تُعطى بالمعادلة $x = \frac{1}{\sqrt{3t}}$، حيث x, y مقيسة بالأقدام.

اكتب معادلة ديكارتية تمثل مسار قفز المهرج في الفترة الزمنية $0 < t \leq 5$. (مثال 3)

للحل

اكتب كل معادلتين وسيطيتين فيما يأتي بالصورة الديكارتية، ثم مثّل المنحنى بيانيًّا: (مثال 4)

13 $x = 3 \cos \theta, y = 5 \sin \theta$

14 $x = 7 \sin \theta, y = 2 \cos \theta$

15 $x = 6 \cos \theta, y = 4 \sin \theta$

16 $x = 3 \cos \theta, y = 3 \sin \theta$

17 $x = 8 \sin \theta, y = \cos \theta$

18 $x = 5 \cos \theta, y = 6 \sin \theta$

للحل

استعمل المتغير الوسيط في كل مما يأتي لكتابة معادلتين وسيطيتين تمثلان المعادلة المعطاة، ثم مثل المنحنى بيانيًا موضحًا السرعة والاتجاه: (مثال 5)

19 $t = 3x - 2, y = x^2 + 9$

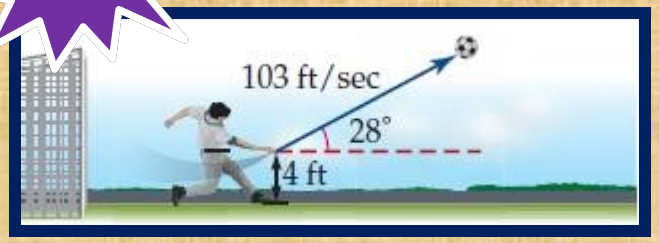
20 $t = 2 - \frac{x}{3}, y = \frac{x^2}{12}$

21 $t = \frac{x}{5} + 4, y = 10 - x^2$

22 $t = \frac{1 - x}{2}, y = \frac{3 - x^2}{4}$

للحل

23 **كرة قدم:** رمى حارس مرمى كرة بسرعة ابتدائية مقدارها 37 ft/s لتصنع زاوية مع الأفق مقدارها 28°. حدّد المسافة التي قطعتها الكرة. (مثال 6)



اكتب كل معادلتين وسيطيتين فيما يأتي بالصورة الديكارتية، ثم مثّل المنحنى بيانيًّا، وحدِّد المجال:

24
$$x = \sqrt{t} + 4$$
$$y = 4t + 3$$

25
$$x = \log t$$
$$y = t + 3$$

26
$$x = \sqrt{t - 7}$$
$$y = -3t - 8$$

27
$$x = \log (t - 4)$$
$$y = t$$

للحل

28 **كرة التنس:** ضرب جمال كرة تنس من على ارتفاع 55 cm عن الأرض بسرعة ابتدائية مقدارها 18 m/s، وتصنع زاوية مع الأفق قياسها 15°.

a) استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل مسار الكرة باستعمال معادلات وسيطية.

b) ما الزمن الذي تستغرقه الكرة في الهواء قبل أن تصطدم بالأرض؟

c) إذا كانت المسافة بين جمال والشبكة 10 أمتار، وارتفاع الشبكة 1.5 m عن سطح الأرض، فهل ستجتاز الكرة الشبكة؟ وإذا حدث ذلك فكم سيكون ارتفاع الكرة عن الشبكة؟ وإذا لم يحدث فكم تكون المسافة بين موقع سقوطها والشبكة؟

للحل

قابل بين كل زوج من المعادلات الوسيطية الآتية ومنحناها أدناه:

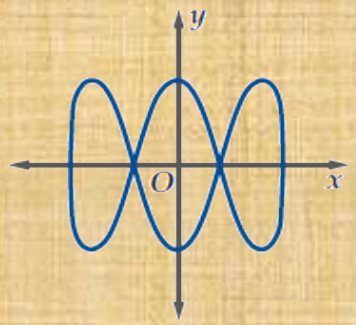
29 $x = \cos 2t, y = \sin 4t$

30 $x = \cos 3t, y = \sin t$

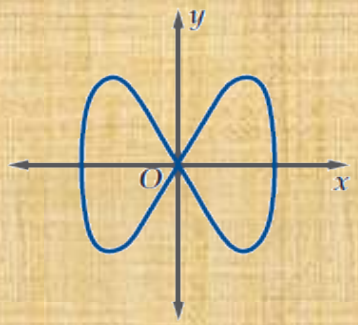
31 $x = \cos t, y = \sin 3t$

32 $x = \cos 4t, y = \sin 3t$

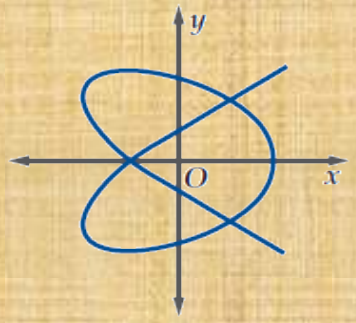
(a



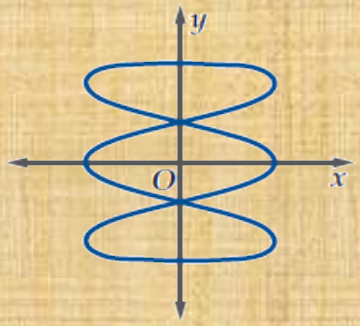
(b



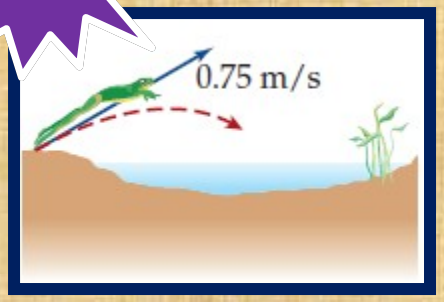
(c



(d



للحل



33 **أحياء:** يقفز ضفدع من حافة جدول بسرعة ابتدائية $0.75\,m/s$ ويصنع زاوية مع الأفق مقدارها $45°$. وينخفض سطح الجدول $0.3\,m$ عن الحافة التي قفز منها الضفدع. افترض أن g تساوي $9.8\,m/s^2$.

a) اكتب معادلتين وسيطيتين تصفان موقع الضفدع عند الزمن t مفترضًا أن سطح الماء يُمثَّل بالمستقيم $y = 0$

b) إذا كان عرض الجدول $0.5\,m$، فهل سيصل الضفدع إلى الضفة الأخرى؟ وإذا لم يصل إلى الضفة الأخرى فكم يكون بعده عنها عندما يصطدم بالماء؟

الحل

34 **سباق:** اشترك حسن وسعيد في سباق جري طوله 100 m، وعندما أطلقت صافرة البدء ركض حسن بسرعة 8.0 m/s من النقطة (0, 2) وبتأخير 0.1 s، بينما ركض سعيد بسرعة 8.1 m/s من النقطة (0, 5) وبتأخير 0.3 s.

a) اكتب معادلتين وسيطيتين تصفان موقع كل منهما باستعمال محور y كخط بداية ومفترضًا أنهما ركضا بموازاة محور x.

b) من منهما سيفوز بالسباق؟ وإذا كانت مسافة السباق 200 m بدلا من 100 m فمن سيفوز؟ فسّر إجابتك.

للحل

35 **تمثيلات متعددة:** ستستقصي في هذه المسألة شكل المنحنى الناتج من مسار نقطة على دائرة نصف قطرها وحدة واحدة تتدحرج على محور x.

a) **بيانيًا:** استعمل حاسبة بيانية لتمثيل منحنى المعادلتين الوسيطيتين $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$، حيث t مقيسة بالراديان.

b) **تحليليًا:** ما المسافة بين كل مقطعي x متتاليين؟ صف ما يمثّله مقطع x وما تمثّله المسافة بين كل مقطعين متتاليين.

c) **تحليليًا:** ما أكبر قيمة لِـ y؟ صف ما تمثله هذه القيمة وكيفية تغيرها مع تغير نصف قطر الدائرة.

عودة

للصفحة

الرئيسية