3
3
3
الدرس
3
3
3

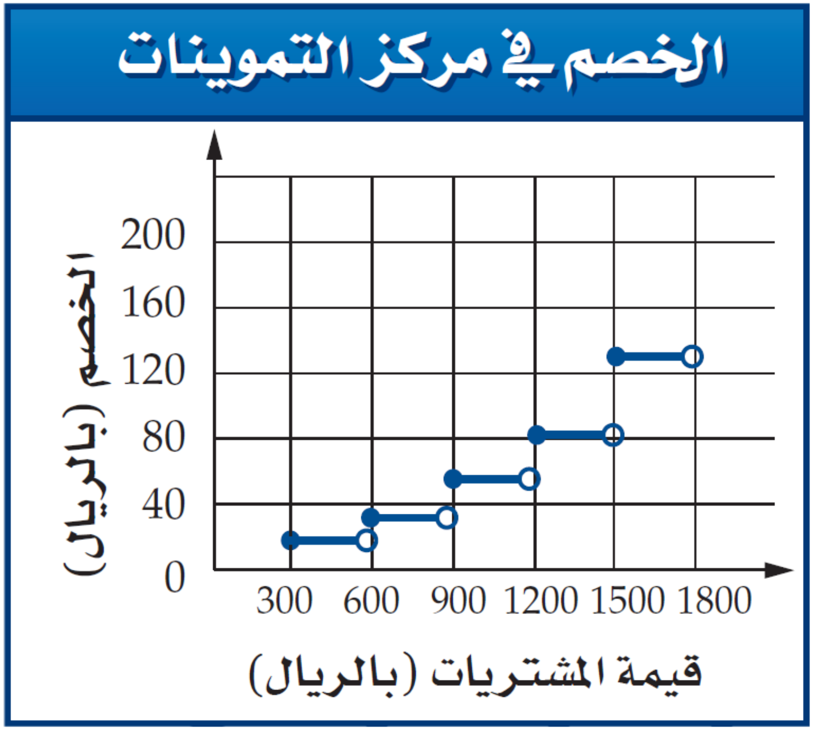
الاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني و النهايات

CONTINUITY , END BEHAVIOR . AND LIMITS

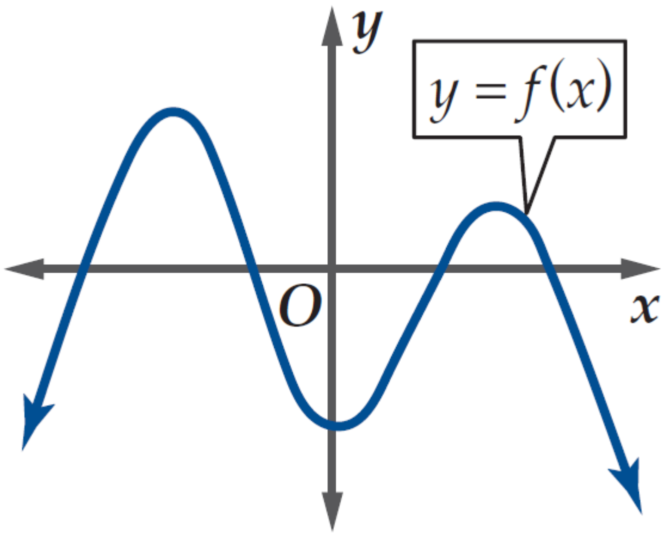

Welcome

لماذا ؟

بمناسبة الافتتاح، قدّم مركز للتموينات بطاقة خصم للمتسوقين وفقًا لقيمة مشترياتهم كما هو مبين في التمثيل البياني المجاور. يتضح من التمثيل البياني أن هناك نقاط انقطاع (قفزات) عند بعض القيم كما هو الحال عند $x=600$, $x=900$.



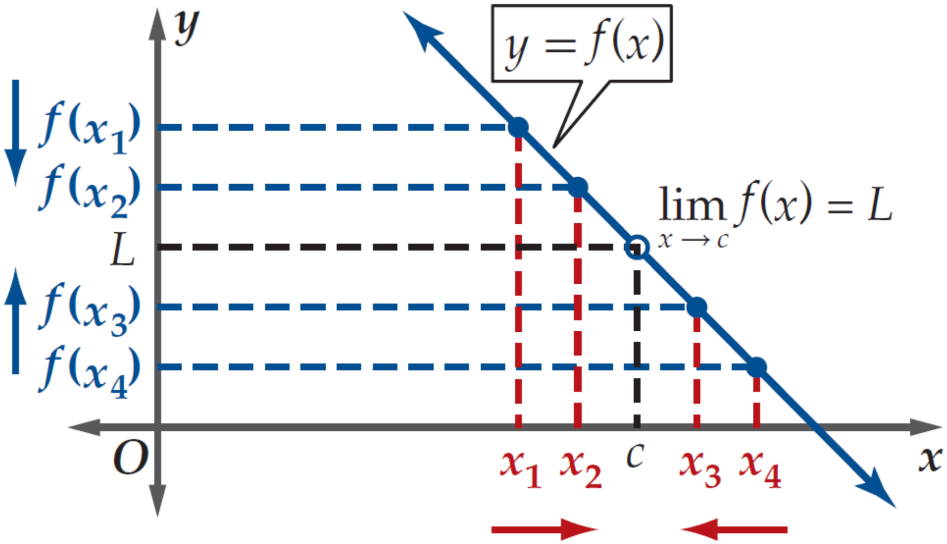
الاتصال : تكون الدالة متصلة إذا لم يكن في تمثيلها البياني أيٌّ انقطاع أو قفزة، وعليه يمكنك تتبع مسار المنحنى دون أن ترفع القلم عنه.



إن أحد شروط اتصال دالة مثل $f(x)$ عند $x = c$ هو أن تقترب قيم الدالة من قيمة واحدة عندما تقترب قيم x من c من جهتي اليمين واليسار. إن مفهوم اقتراب قيم الدالة من قيمة دون الحاجة إلى الوصول إلى تلك القيمة يُسمى النهاية.

مفهوم اساسي

النهـــــــايات



التعبير اللفظي :

إذا كانت قيمة الدالة f(x) تقترب من قيمة

واحدة L عندما تقترب x من c من الجهتين.

فإن نهاية f(x) عندما تقترب x من c هي L.

الرموز :

نقول إن $\lim_{x \to c} f(x) = L$ و تقرأ نهاية الدالة f (x) عندما تقترب x من c هي L

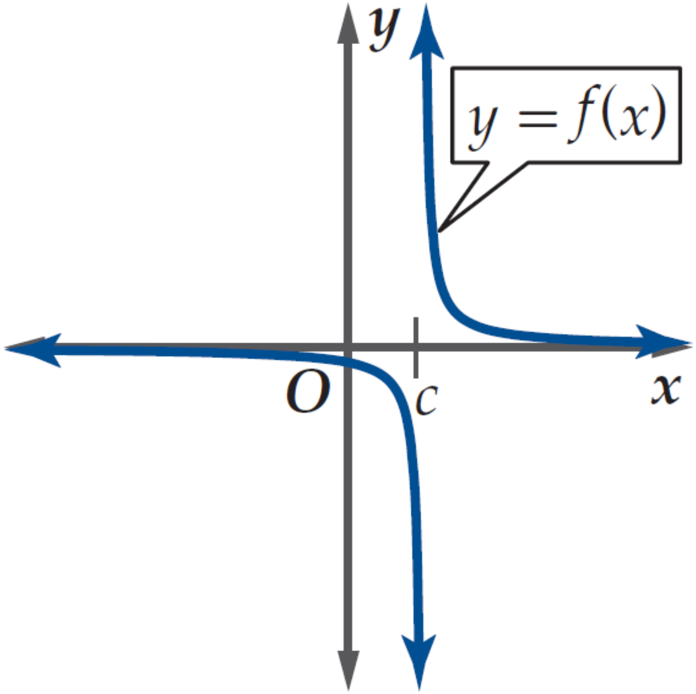
إن التمثيل البياني للدالة غير المتصلة يساعدك على فهم المعنى الجبري للاتصال.
وفيما يأتي ملخص لأهم حالات عدم اتصال الدالة:

أنواع عدم الاتصال

مفهوم اساسي

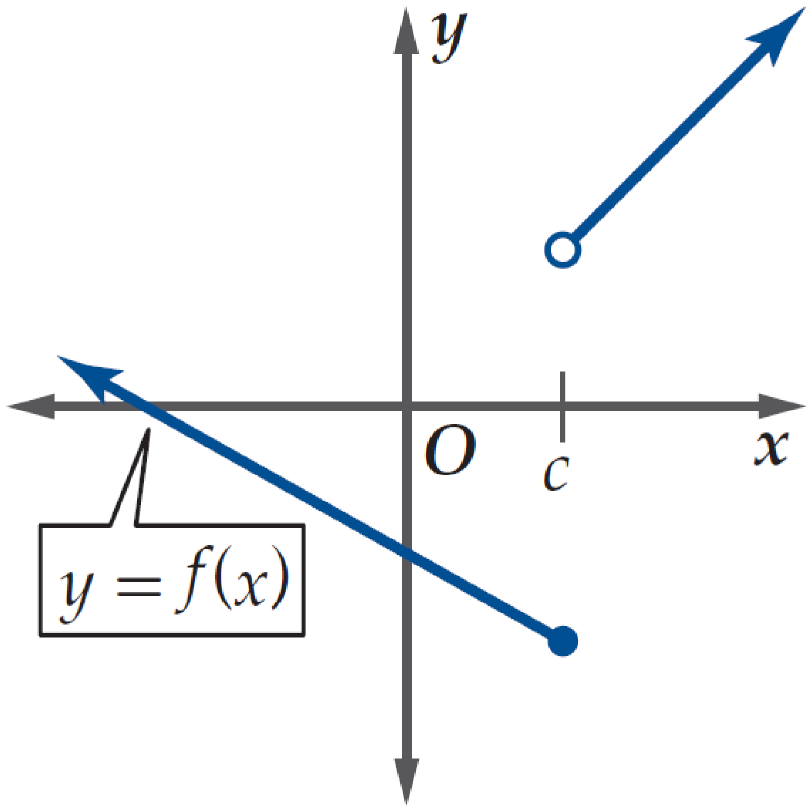
للدالة **عدم اتصال لا نهائي** عند $x = c$ إذا تزايدت قيم الدالة أو تناقصت بلا حدود عندما تقترب x من c من اليمين أو اليسار.

مثال :



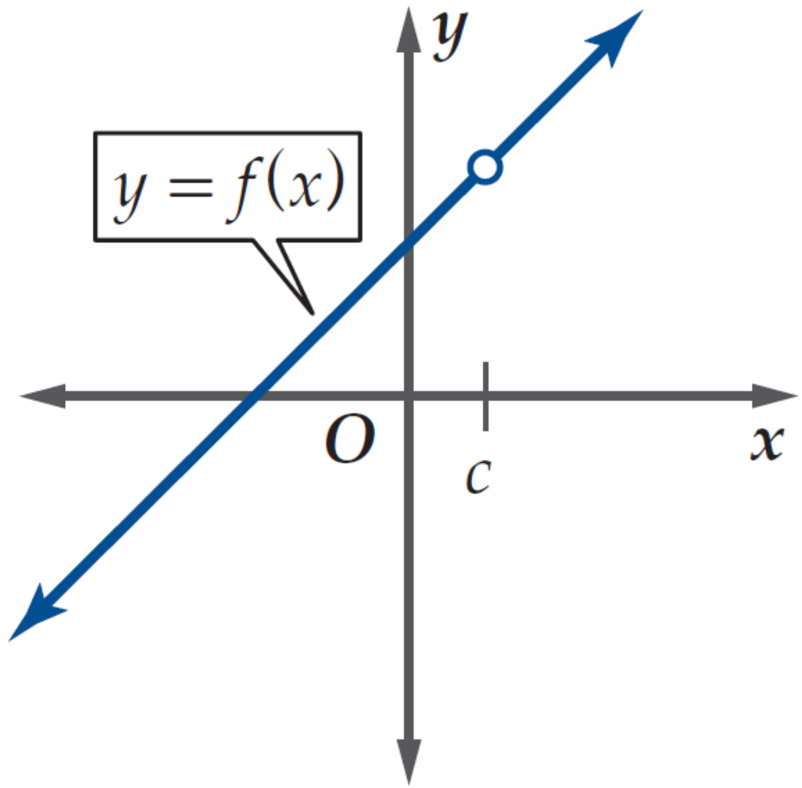
للدالة عدم اتصال قفزي عند x = c إذا كانت نهايتا الدالة عندما تقترب x من c من اليمين ومن اليسار موجودتين، ولكنهما غير متساويتين

مثال :

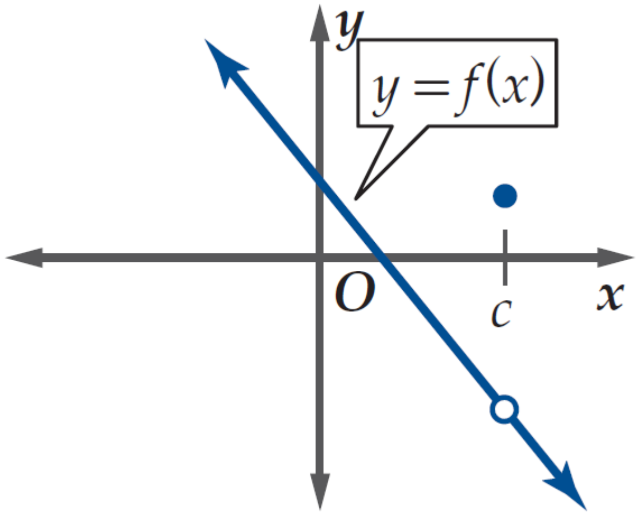


للدالة عدم اتصال نقطي عند $x = c$ إذا كانت نهاية الدالة عندما تقترب x من c موجودة، ولا تساوي قيمة الدالة عند $x = c$ ويشار إليها بدائرة صغيرة (°)

مثال :



يسمي عدم الاتصال النقطي عدم اتصال قابل للإزالة ؛ لأنه يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند تلك النقطة ، و في هذه الحالة تكون النهاية $x = c$ موجودة و لكن الدالة غير معرفة عند $x = c$ أو أن $f(c)$ لا تساوي قيمة نهاية الدالة عند $x = c$ ، كما في الشكل المجاور .



يصنف كلا من عدم الاتصال اللانهائي و عدم الاتصال القفزي علي أنهما عد اتصال غير قابل للإزالة ؛ لأم قيم الدالة تقترب من قيم مختلفة إلي يمين نقطة عدم الاتصال ، و إلي يسارها ، أو أن قيم الدالة لا تقترب من قيمة محددة عند هذه النقطة ، أي تزداد الدالة أ، تتناقض بلا حدود .

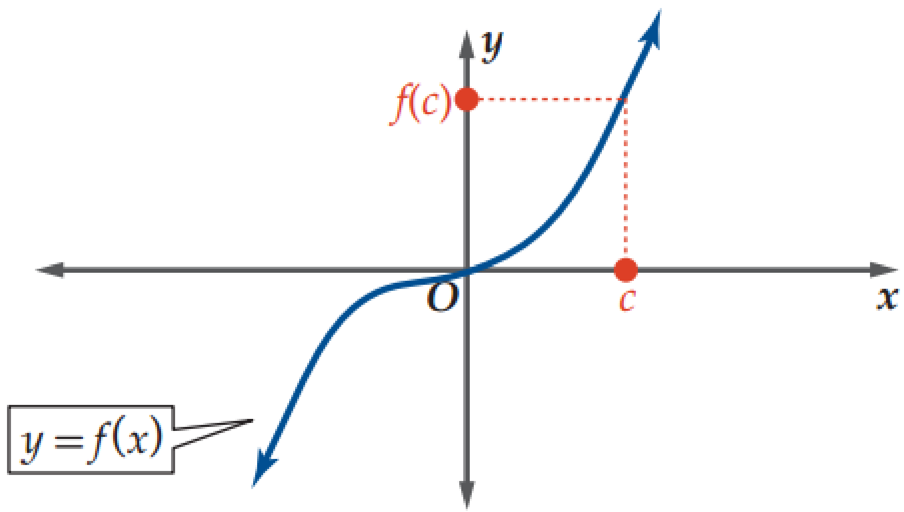
تقودنا الملاحظات السابقة إلي اختبار الاتصال الآتي :

ملخص المفهوم

اختبار الاتصال

يقال: إن الدالة f(x) متصلة عند x = c إذا حقّقت الشروط الآتية :

- **f(x) معرّفة عند c، أي أن f(c) موجودة .**
- **f(x) تقترب من القيمة نفسها عندما تقترب x من c من الجهتين. أي أن** $\lim_{x \to c} f(x)$ **موجودة .**
- $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$



مثال 1 التحقق من الاتصال عند نقطة

حدّد ما إذا كانت الدالة $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ متصلة عند x = 2. برّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال ، تحقّق من شروط الاتصال الثلاثة.

1) هل f(2) موجودة؟

f(2) = 1 ، أي أن الدالة معرّفة عند x = 2.

2) هل $\lim_{x \to 2} f(x)$ موجودة ؟ .

كوّن جدولاً يبين قيم f(x) عندما تقترب x من 2 من اليسار واليمين

x	1.9	1.99	1.999	2.0	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.52	0.95	0.995		1.005	1.05	1.52

يُبين الجدول أنه عندما تقترب قيم x من 2 من اليسار ومن اليمين، فإن قيمة f(x) تقترب من 1، أي أن

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 1$$

3) هل $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$ ؟ .

بما أن $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$ ، $f(2) = 1$ نستنتج أن $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$

، إذن الدالة متصلة عند $x = 2$. ويوضّح منحنى الدالة $f(x)$ في الشكل 1.3.1 اتصال الدالة عند $x = 2$

تحقق من فهمك

حدّد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلتين عند x = 0. برّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال :

(1A $f(x) = x^3$

$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ ؛ فالدالة متصلة عند $x = 0$.

(1B

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & , \ x < 0 \\ x & , \ x \geq 0 \end{cases}$$

الدالة غير متصلة عند $x = 0$ ؛ لأن $f(x)$ تقترب من قيمتين مختلفتين عندما تقترب x من 0 .

إذا لم يتحقق أي من شروط الاتصال عند نقطة معينة تكون الدالة غير متصلة عند تلك النقطة، فاختبار اتصال الدالة يساعدك على تحديد نوع الاتصال عند تلك النقطة.

مثال 2

تعيين نقاط عدم الاتصال

حدّد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند قيم x المعطاة. برّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، وإذا كانت الدالة غير متصلة، فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي، قفزي، قابل للإزالة.

a) $f(x)=\begin{cases} 3x-2 & , x>-3 \\ 2-x & , x\le -3 \end{cases}$ عند $x=-3$

1) f(-3) موجودة؛ لأن f(-3) = 5.

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من 3 – .

X	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0	-2.999	-2.99	-2.9
f(x)	5.1	5.01	5.001		-10.997	-10.97	-10.7

يُظهر الجدول أن قيم f(x) تقترب من 5 عندما تقترب x من 3 – من اليسار، في حين تقترب قيم f(x) من 11 – عندما تقترب x من 3 – من اليمين. وبما أن قيم f(x) تقترب من قيمتين مختلفتين عندما تقترب x من 3 – فإن للدالة f(x) عدم اتصال قفزي عند x = - 3. ويوضح منحنى الدالة f(x) في الشكل 1.3.2 عدم اتصال الدالة عند x = - 3.

(b $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-9}$ عند $x=3, x=-3$

(1 $f(3)=\dfrac{6}{0}, f(-3)=\dfrac{0}{0}$ وهي غير معرّفة، أي أن **f(3)** غير موجودة، وعليه تكون **f(x)** غير متصلة عند كلاً من **x = 3 , x = -3.**

(2 ابحث في قيم الدالة عندما تقترب **x** من **3 –** .

X	2.9	2.99	2.999	3.0	3.001	3.01	3.1
f(x)	-10	-100	-1000		1000	100	10

يُظهر الجدول أن قيم **f(x)** تتناقص بلا حدود عندما تقترب **x** من **3** من اليسار، وأن قيم **f(x)** تتزايد بلا حدود عندما تقترب **x** من **3** من اليمين،

وعليه، فإن $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ غير موجودة .

3) $F(x)$ غير متصلة عند $x = -3$ ؛ لأن $f(-3)$ غير موجودة ، و بما إن $\lim_{x \to 3} f(x)$ موجودة .
، فإن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x = -3$ و للدالة $f(x)$ عدم اتصال لا نهائي عند $x = 3$ لأن قيم $f(x)$ تتناقص دون توقف عندما تقترب من 3 من اليسار و تتزايد بلا توقف عندما تقترب x من 3 من اليمين ، و يوضح المنحني في الشكل 1.3.3 هذا السلوك .

تحقق من فهمك

(2A $f(x) = \frac{1}{x^2}$ عند $x = 0$

غير متصلة عند $x = 0$، $f(0) = \frac{1}{0}$ بما أن هذه القيمة غير معرفة، فإن للدالة عدم اتصال لا نهائي عند $x = 0$.

(2B $f(x) = \begin{cases} 5x + 4 & , x > 2 \\ 2 - x & , x \le 2 \end{cases}$ عند $x = 2$

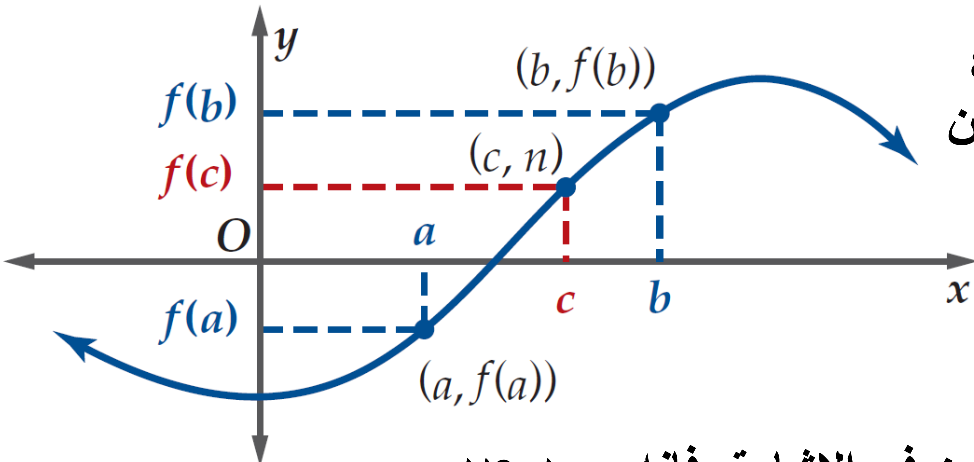
غير متصلة عند $x = 2$، $f(2) = 0$، وبما أن $f(x)$ تقترب من 0 عندما تقترب x من 2 من جهة اليسار، في حين تقترب من 14 عندما تقترب x من 2 من جهة اليمين، لذا فإن $\lim_{x \to 2} f(x)$ غير موجودة. وللدالة عدم اتصال قفزي عند $x = 2$.

تستعمل نظرية القيمة المتوسطة و نتيجتها لتقريب أصفار الدوال المتصلة .

نظرية

نظرية القيمة المتوسطة

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a , b]$ وكانت $a < b$
ووجدت قيمة n بين $f(a)$ و $f(a)$ فإنه يوجد عدد c بين
a و َb، بحيث $f(c) = n$



نتيجة (موقع صفر الدالة) :

إذا كانت ب$f(x)$ دالة متصلة وكان $f(a)$ و $f(b)$ مختلفين في الإشارة، فإنه يوجد عدد واحد على الأقل c بين a و b، بحيث $f(c) = 0$ أي يوجد صفر للدالة بين a و b.

مثال 3

تقريب الأصفار عند تغيير الإشارة

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = x^3 - 4x + 2$ في الفترة $[-4, 4]$

X	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	-46	-13	2	5	2	-1	2	17	50

وبما أن f(-3) سالبة و f(-2) موجبة، وبحسب النتيجة السابقة، فإنه يوجد صفر للدالة f(x) بين -3 , -2. يوجد صفر للدالة في الفترة $-3 < x < -2$ لاحظ أن قيم الدالة تتغير إشاراتها أيضًا في الفترة $0 < x < 1$ وفي الفترة $1 < x < 2$. وهذا يدل على وجود أصفار للدالة في هاتين الفترتين ،.ويوضح منحنى الدالة f(x) في الشكل 1.3.4. هذه النتيجة.

تحقق من نفسك

3A) $[-6,4], f(x)=x^3+2x^2-8x+3$

بين العددين -5 وَ -4، وبين 0 وَ 1، وبين 1 وَ 2

(3B $f(x)=\dfrac{x^2-6}{x+4},\ [-3,4]$

بين العددين -3 وَ -2 وبين 2 وَ 3

إن تغير إشارات قيم الدالة في فترة ما يحدّد موقعًا تقريبيًّا لصفر الدالة الحقيقي. أمّا الفترات التي لا تتغير فيها الإشارة فإنها لا تنفي وجود أصفار للدالة، ويُعدُّ تمثيل الدالة من أفضل طرق التحقق في ذلك.

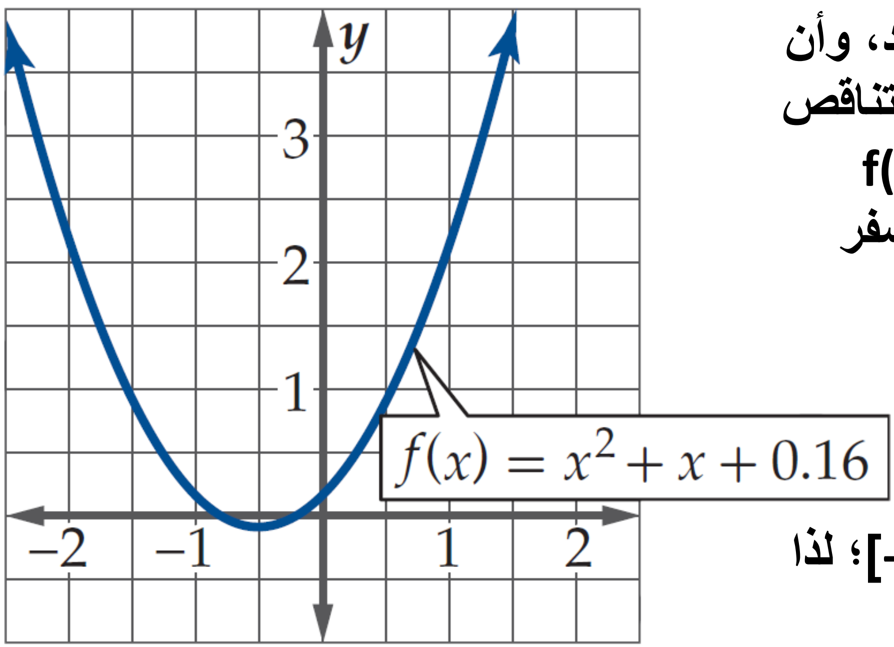
مثال 5

تقريب الأصفار دون تغير الإشارة

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = x^2 + x + 0.16$ في الفترة $[-3, 3]$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	6.16	2.16	0.16	0.16	2.16	6.16	12.16

تعلم أن الدالة f متصلة على [-3, 3]؛ لأنها كثيرة حدود، وأن قيمها لا تغير إشارتها عند قيم x المعطاة، ولكن f(x) تتناقص عندما تقترب قيم x من العدد 1 – من اليسار، وتبدأ f(x) بالتزايد عن يمين x = 0؛ لذا فإن من المحتمل وجود صفر حقيقي للدالة بين العددين المتتاليين 1 – و 0.
مثّل الدالة بيانيًا للتحقق من ذلك.



يقطع منحنى الدالة المحور x مرتين في الفترة [- 1, 0]؛ لذا فإنه يوجد صفرين حقيقيين للدالة في هذه الفترة.

تحقق من نفسك

4A) $f(x) = 8x^3 - 2x^2 - 5x - 1, [-5, 5]$

للدالة صفر حقيقي عند $x = 1$، وصفران حقيقيان بين العددين -1 وَ 0

4B) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 18x - 14, [0, 4]$

للدالة صفر حقيقي بين العددين 1 وَ 2

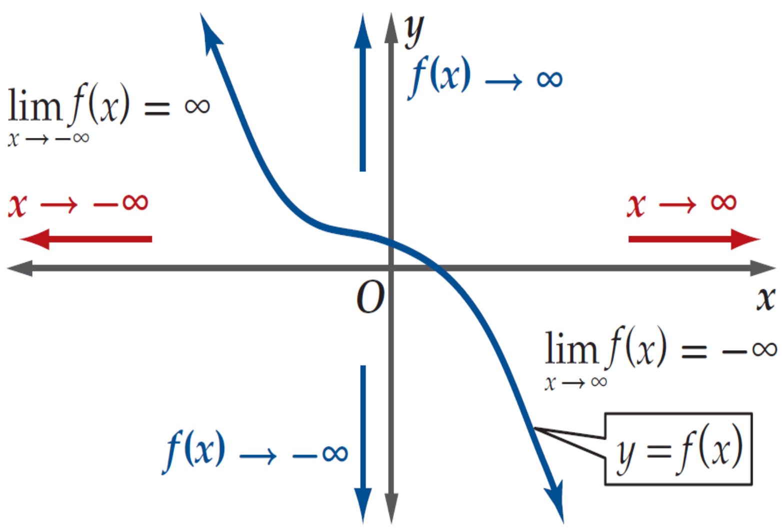
سلوك طرفي التمثيل البياني: يصف سلوك طرفي التمثيل البياني شكل الدالة عند طرفي منحناها، أي أنه يصف قيم f(x) عندما تزداد قيم x أو تنقص بلا حدود، أي عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$.
ولوصف سلوك طرفي التمثيل البياني يمكنك استعمال مفهوم النهاية.

سلوك طرف التمثيل البياني من اليسار

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

سلوك طرف التمثيل البياني من اليمين

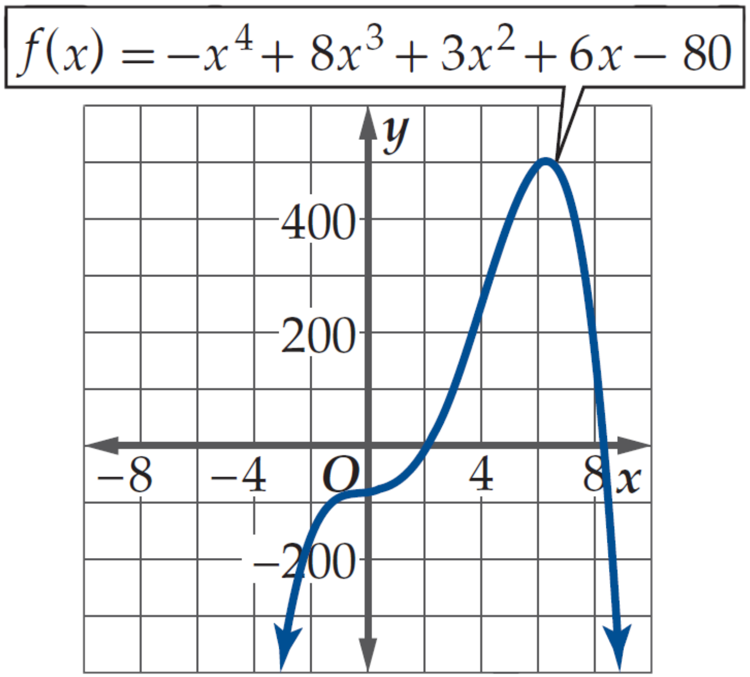
$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$



أحد إمكانات سلوك طرفي التمثيل البياني هو زيادة قيم f(x) أو نقصانها دون حدود. ويمكن وصف هذا السلوك بأن f(x) تقترب من موجب ما لا نهاية أو من سالب ما لا نهاية على الترتيب.

مثال 6 المنحنيات التي تقترب من ما لا نهاية

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = -x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 6x - 80$ لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني، ثم عزّز إجابتك عدديًّا.



التحليل بيانياً :

يتضح من التمثيل البياني أن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

وأن $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

التعزيز عددياً :

كوّن جدولاً لاستقصاء قيم f(x) عندما تزداد |x| ، أي استقصِ قيم f(x) عندما تزداد قيم x بلا حدود أو تتناقص بلا حدود.

X	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
f(x)	$-1 . 10^{16}$	$-1 . 10^{12}$	$-1 . 10^{8}$	-80	$-1 . 10^{8}$	$-1 . 10^{12}$	$-1 . 10^{16}$

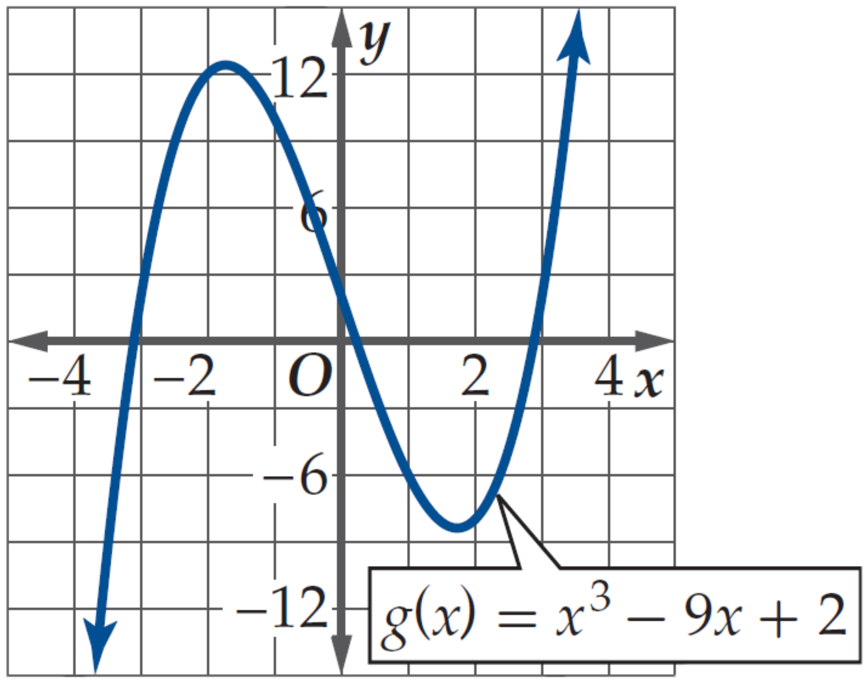
لاحظ أنه عندما $x \to -\infty$ **فإن** $f(x) \to -\infty$

و بالمثل عندما $x \to \infty$ **فإن** $f(x) \to -\infty$

و هذا يعزز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني .

تحقق من نفسك

(6A

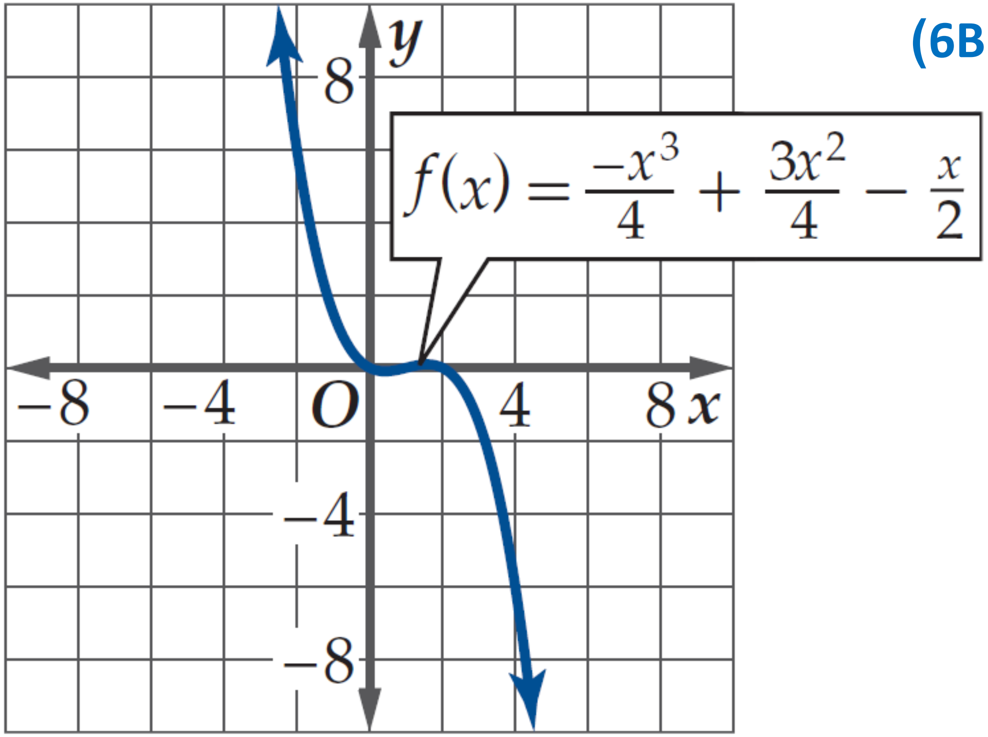


يتضح من التمثيل البياني أنه عندما $x \to -\infty$ ، فإنَّ $g(x) \to -\infty$. وعندما $x \to \infty$ ، فإنَّ $g(x) \to \infty$.

أي أنَّ: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$.

x	$g(x)$
-10000	$-1\cdot10^{12}$
-1000	$-1\cdot10^{9}$
0	2
1000	9999.9×10^{5}
10000	10^{12}

(6B



يتضح من التمثيل البياني أنه عندما $x \to -\infty$ ، فإنَّ $f(x) \to \infty$. عندما $x \to \infty$ ، فإنَّ $f(x) \to -\infty$.

أي أن: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

و $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.

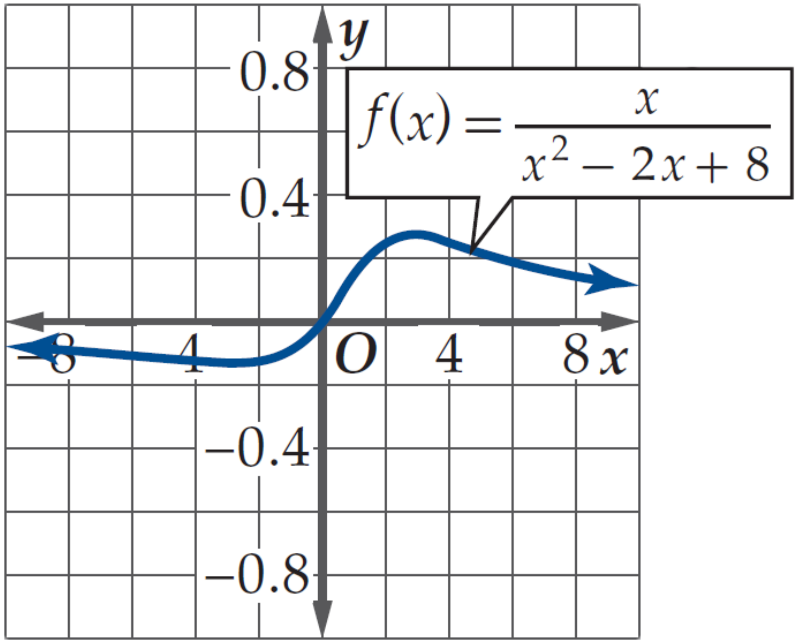
x	$f(x)$
−10,000	$-1\cdot10^{11}$
−1000	$-1\cdot10^{8}$
0	0
1000	$-2.5\cdot10^{8}$
10,000	$-2.5\cdot10^{11}$

لاحظ أن بعض الدوال تقترب قيمها من ∞ او −∞ عندما تزداد |x| بلا حدود، على حين تقترب قيم بعض الدوال من أعداد حقيقية دون أن تصل إليها بالضرورة.

مثال 7 منحنيات دوال تقترب من قيمة محددة

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x)=\dfrac{x}{x^2-2x+8}$

لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني، ثم عزّز إجابتك عدديًّا.



التحليل بيانياً :

يتضح من التمثيل البياني أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

وأن $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$

التعزيز عددياً :

X	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
f(x)	$-1 . 10^{-4}$	-0.001	-0.01	0	0.01	0.001	$1 . 10^{-4}$

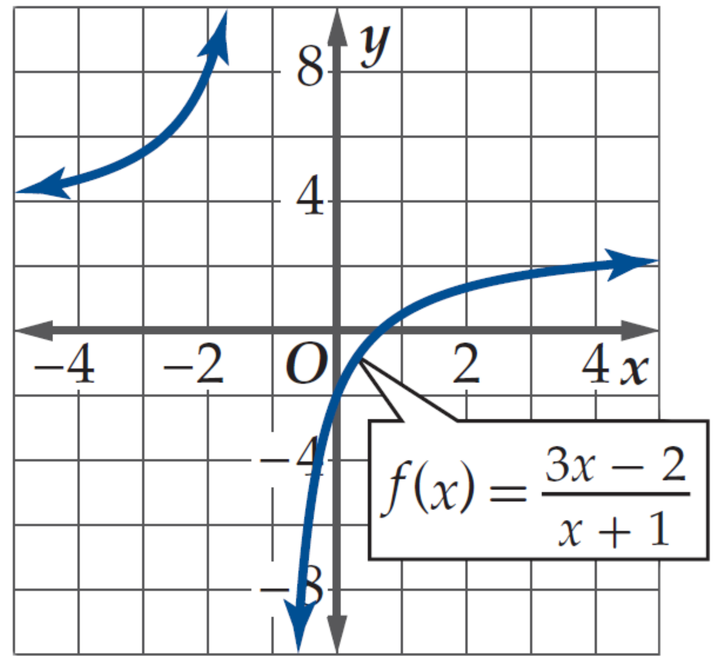
لاحظ أنه عندما $x\to-\infty$ فإن $f(x)\to 0$

و بالمثل عندما $x\to\infty$ فإن $f(x)\to 0$

و هذا يعزز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني .

تحقق من فهمك

(7A



يتضح من التمثيل البياني أنه عندما $x \to -\infty$ ، فإنَّ $f(x) \to 3$. وعندما $x \to \infty$ ، فإنَّ $f(x) \to 3$.

أي أنَّ: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$ و $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 3$.

(7B

يتضح من التمثيل البياني

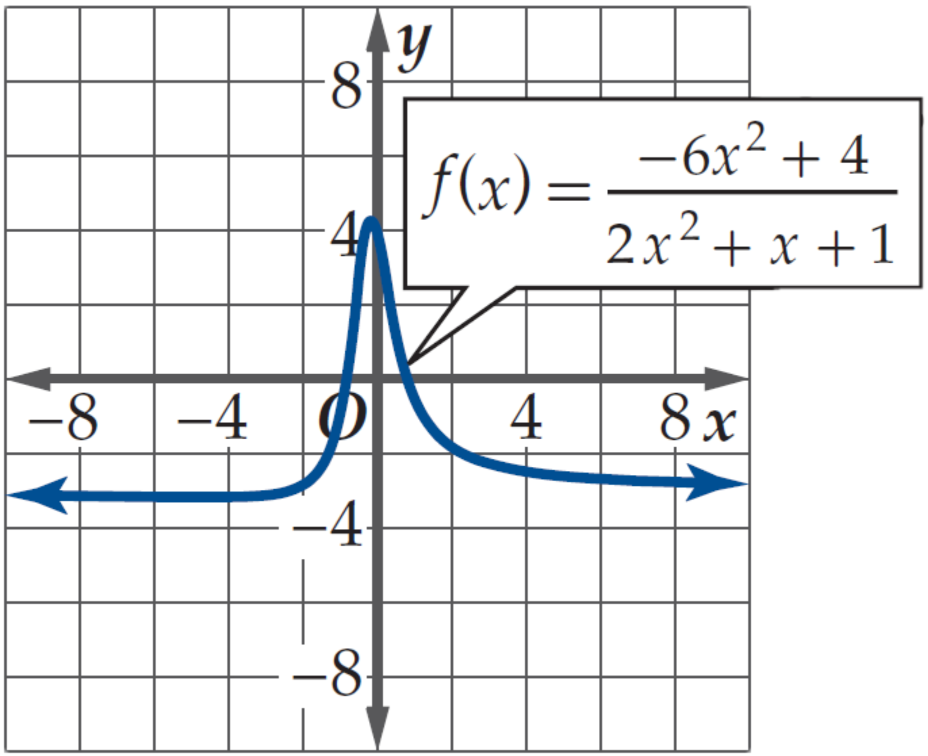
أنه عندما $x \to -\infty$، فإنَّ

$f(x) \to -3$. وعندما

$x \to \infty$، فإنَّ $f(x) \to -3$.

أي أنَّ: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -3$

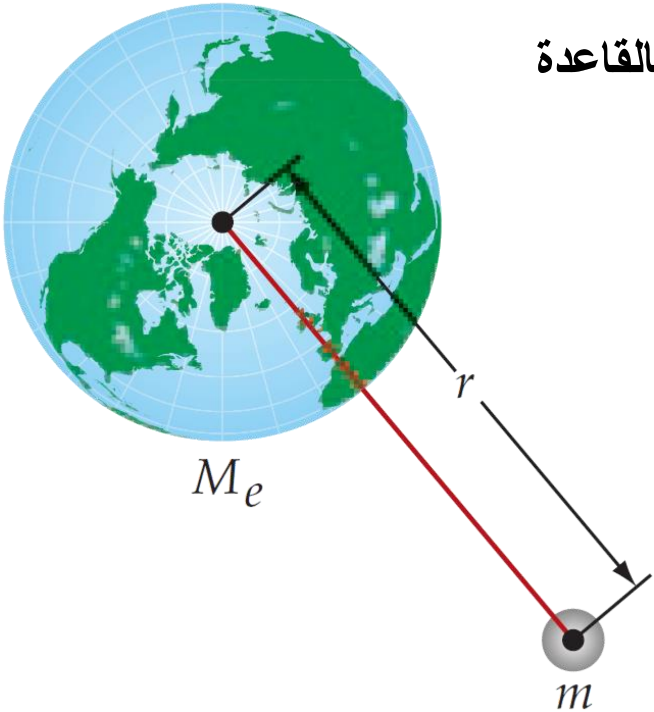
و $\lim_{x \to \infty} f(x) = -3$.



إن معرفة سلوك طرفي التمثيل البياني يساعد على حل بعض المسائل الحياتية.

مثال 8 من واقع الحياة

تطبيقات سلوك طرفي التمثيل البياني



فيزياء : تُعطى قيمة طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لجسم بالقاعدة

$$U(r) = -\frac{GmM_e}{r}$$

حيث G ثابت نيوتن للجذب الكوني ، و كتلة الجسم، و M_e كتلة الأرض، و r المسافة بين الجسم ومركز الأرض كما في الشكل المجاور. ماذا يحدث لطاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لجسم عندما يتحرك مبتعدًا عن الأرض مسافة كبيرة جدًا؟

المطلوب من المسألة وصف سلوم طرف التمثيل البياني لـ $U(r)$ عندما تزداد قيم r كثيراً ، أي إيجاد $\lim_{r \to \infty} U(r)$

و بما إن كلاً من G, m, M_e فغن ناتج الضرب GmM_e عدد ثابت أيضاً .

و عندما تزداد قيم r فإن قيمة الكسر $-\frac{GmM_e}{r}$ تقترب من الصفر ؛ لذا فإن $\lim_{r \to \infty} U(r) = 0$

ومن ثم إذا تحرك جسم مبتعدا عن الأرض بصورة كبيرة، فإن طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لهذا الجسم تقترب من الصفر.

تحقق من فهمك

٨) فيزياء: الضغط الديناميكي هو قياس الضغط الناتج عن حركة جزيئات الغاز ويعطى بالقاعدة $q(v) = \frac{\rho v^2}{2}$، حيث (ρ ويقرأ روه) كثافة الغاز، و v السرعة التي يتحرك بها الجزيء. ماذا يحدث للضغط الديناميكي لجزيئات الغاز عندما تستمر سرعة الجزيئات في التزايد؟

عندما تستمر سرعة جزيئات الغاز في التزايد، فإن الضغط الديناميكي يؤول إلى ∞ .

حدد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة عند قيمة x المعطاة. وبرر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي، قفزي، قابل للإزالة. (المثالان 1, 2)

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$، عند $x = -5$.

الدالة معرفة عند $x = -5$ ، تؤول قيم الدالة إلى 4.58 عندما تقترب x من -5 من الجهتين؛ $f(-5) = 4.58$. الدالة متصلة عند -5.

2) $f(x) = \sqrt{x + 5}$، عند $x = 8$.

الدالة معرفة عند $x = 8$، تؤول قيم الدالة إلى 3.61 عندما تقترب x من 8 من الجهتين؛ $f(8) = 3.61$. الدالة متصلة عند 8.

3) $h(x) = \frac{x^2 - 36}{x + 6}$ ، عند $x = -6 , x = 6$.

للدالة عدم اتصال قابل للإزالة عند $x = -6$ ، الدالة معرفة عند $x = 6$ ، تقترب قيم الدالة إلى 0 عندما تقترب x إلى 6 من الجهتين. $h(6) = 0$ الدالة متصلة عند $x = 6$.

4) $g(x) = \frac{x}{x - 1}$ ، عند $x = 1$.

للدالة عدم اتصال لا نهائي عند $x = 1$.

5) $h(x) = \frac{x - 4}{x^2 - 5x + 4}$ ، عند $x = 1 , x = 4$.

للدالة عدم اتصال قابل للإزالة عند $x = 4$. للدالة عدم اتصال لا نهائي عند $x = 1$، قيم الدالة تقترب من $\frac{1}{3}$ عندما تقترب x من 4 من الجهتين.

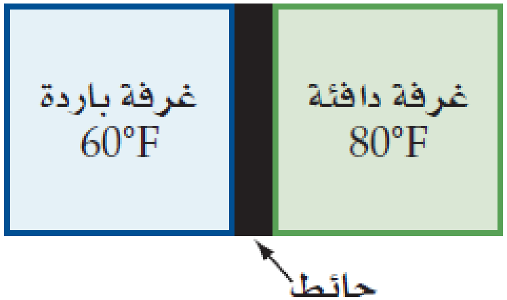
6) $h(x) = \dfrac{x(x-6)}{x^3}$ ، عند $x = 0 \, , \, x = 6$.

للدالة عدم اتصال لا نهائي عند
$x = 0$، الدالة معرفة عند $x = 6$،
وتقترب قيم الدالة من 0 عندما تقترب x
من 6 من الجهتين؛ $h(6) = 0$ ،
الدالة متصلة عند $x = 6$.

7) $f(x) = \begin{cases} 4x - 1 & , \quad x \leq -6 \\ -x + 2 & , \quad x > -6 \end{cases}$ ، عند $x = -6$.

للدالة عدم اتصال قفزي عند
$x = -6$، حيث $f(x)$
تقترب من -25 عندما تقترب x من -6
من جهة اليسار، وتقترب من 8 عندما
تقترب x من -6 من جهة اليمين .

8) **فيزياء:** غرفتان درجتا حرارتهما مختلفتان يفصل بينهما حائط. تنتقل الحرارة بين الغرفتين عبر الحائط بحسب العلاقة $f(w) = \frac{7.4}{w}$، حيث تمثل $f(w)$ المعدل الزمني لانتقال الحرارة بالواط، و w سمك الحائط بالمتر. **(المثالان 1,2)**



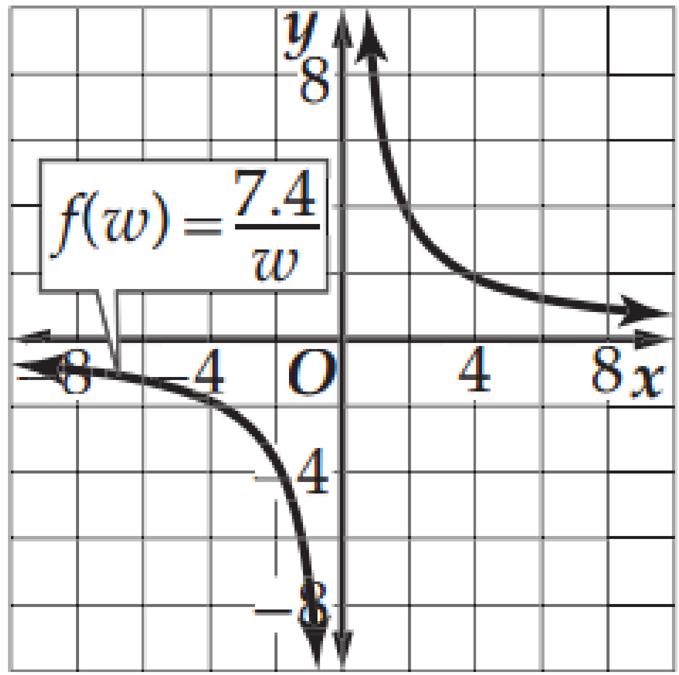
a) حدد ما إذا كانت الدالة متصلة عند $w = 0.4$. وبرِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

نعم متصلة؛ إجابة ممكنة: بما أن $f(4) = \frac{7.4}{0.4} = 18.5$؛ فإن الدالة معرفة عند $x = 0.4$. لذا فإن $\lim_{x \to 4} f(w) = 18.5$.

b) حدّد نقاط عدم الاتصال للدالة (إن وجدت)، وما نوعه؟

غير متصلة؛ للدالة عدم اتصال لا نهائي عند $w = 0$. إجابة ممكنة: بما أن $f(0)$ غير موجودة، فإن $f(w)$ غير متصلة عند $w = 0$، و $\lim_{x \to 0} f(w)$ غير موجودة لأن $f(w)$ تتناقص بلا حدود عندما تقترب w من 0 من اليسار، وتتزايد بلا حدود عندما تقترب w من 0 من اليمين. وعليه فإن للدالة عدم اتصال لانهائي عند $w = 0$.

c) مثّل الدالة بيانيًّا للتحقق مما توصلت إليه في الفرع b .



9) أعد تعريف الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ لتصبح متصلة عند $x = -3$ (المثال 3)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x + 3} & , \quad x \neq -3 \\ -6 & , \quad x = -3 \end{cases}$$

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكل دالة مما يأتي في الفترة المعطاة: (المثالان 4, 5)

10) $f(x) = x^3 - x^2 - 3, [-2, 4]$

بين 1 وَ 2

11) $g(x) = -x^3 + 6x + 2, [-4, 4]$

بين 3− وَ 2− ، وبين 1− وَ 0 ،
وبين 2 وَ 3

12) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 3, [-3, 3]$

بين1− وَ 0، وبين 1 وَ 2

13) $h(x) = \frac{x^2 + 4}{x - 5}, [-2, 4]$

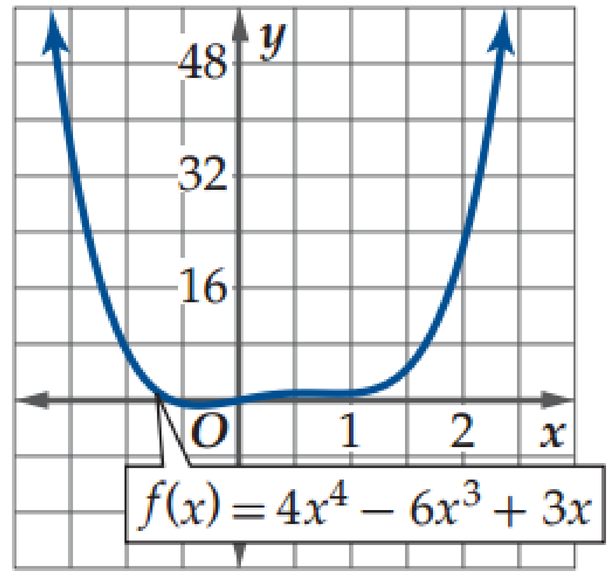
لا يوجد أصفار للدالة في الفترة المعطاة.

14) $g(x) = \sqrt{x^3 + 1} - 5, [0, 5]$

بين 2 وَ 3

استعمل التمثيل البياني لكل من الدوال الآتية لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثم عزز إجابتك عدديًا. (المثالان 6, 7)

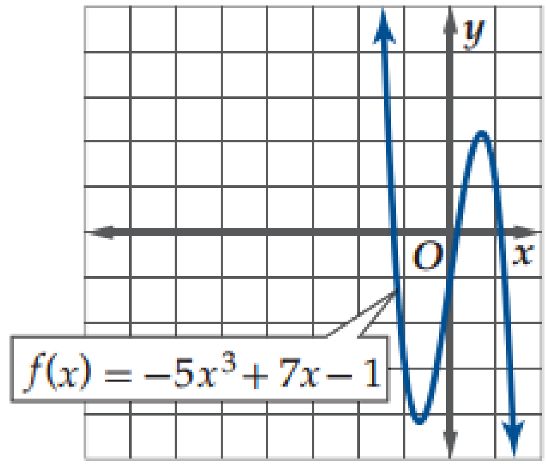
(15



يتضح من التمثيل البياني أن $f(x) \to \infty$ عندما $x \to -\infty$، $f(x) \to \infty$ عندما $x \to \infty$.

x	-10000	-1000	0	1000	$10,000$
$f(x)$	$4 \cdot 10^{16}$	$4 \cdot 10^{12}$	0	$4 \cdot 10^{12}$	$4 \cdot 10^{16}$

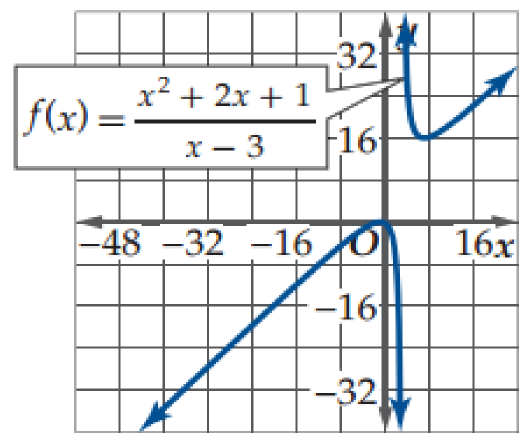
(16



يتضح من التمثيل البياني أن $f(x) \to \infty$ عندما $x \to -\infty$، $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to \infty$.

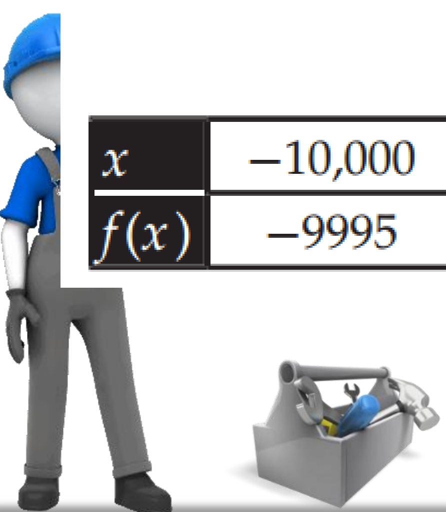
x	-10000	-1000	0	1000	10000
$f(x)$	$5 \cdot 10^{12}$	$5 \cdot 10^{9}$	-1	$-5 \cdot 10^{9}$	$-5 \cdot 10^{12}$

(17

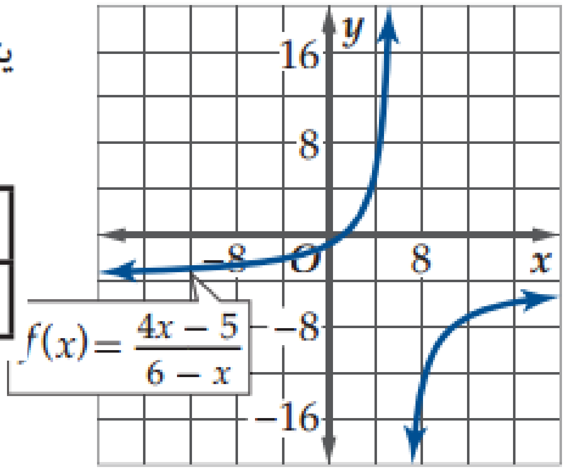


يتضح من التمثيل البياني أن $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$، $f(x) \to \infty$ عندما $x \to \infty$.

x	$-10,000$	-1000	0	1000	$10,000$
$f(x)$	-9995	-995	-0.3333	1005	$10,005$



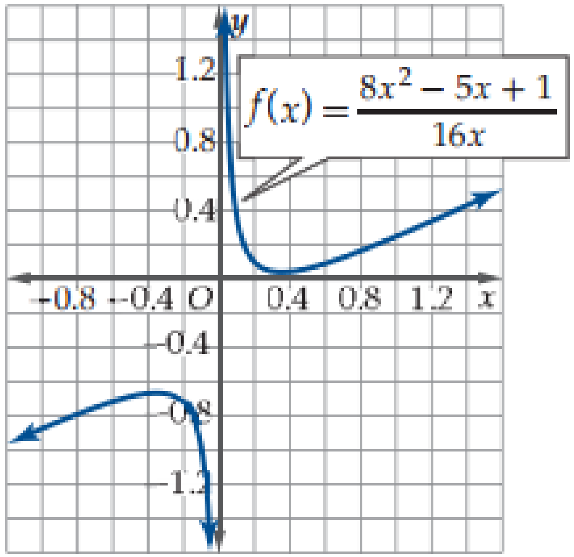
(18



يتضح من التمثيل البياني أن $f(x) \to -4$ عندما $x \to -\infty$ ،
$f(x) \to -4$ عندما $x \to \infty$.

x	$-10,000$	-1000	0	1000	$10,000$
$f(x)$	-3.9981	-3.9811	-0.8333	-4.0191	-4.0019

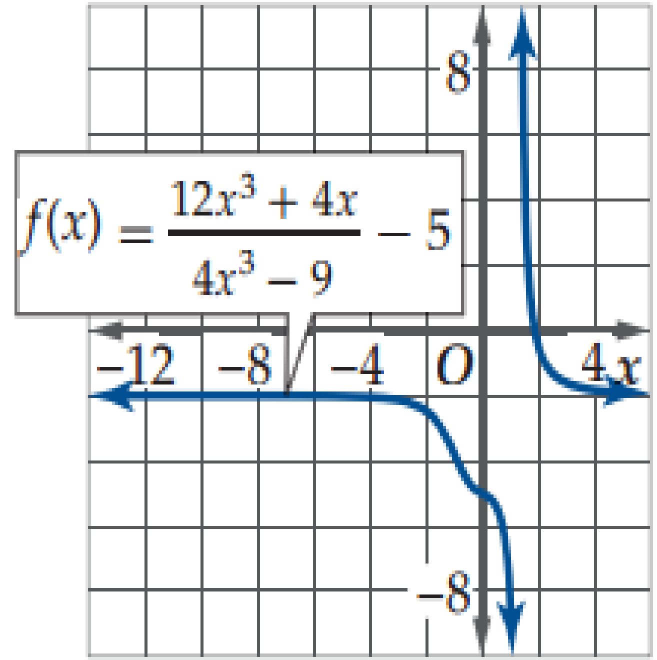
(19



يتضح من التمثيل البياني أن $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$ ،
$f(x) \to \infty$ عندما $x \to \infty$.

x	$-10,000$	-1000	0	1000	$10,000$
$f(x)$	-5000	-500	غير معرفة	499.7	4999.7

(20

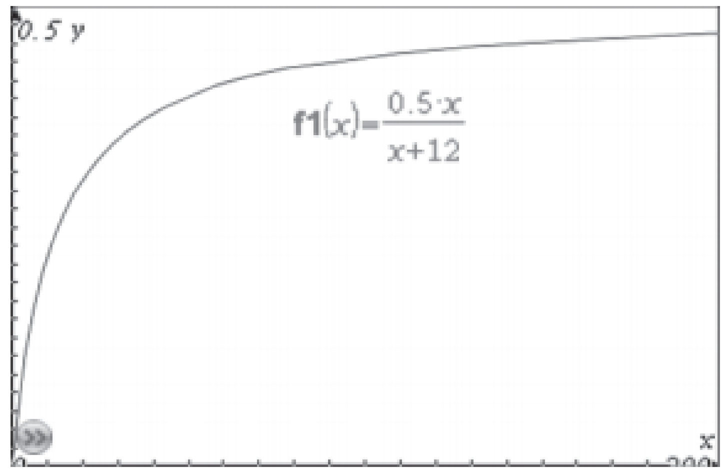


يتضح من التمثيل البياني أن $f(x) \to -2$ عندما $x \to -\infty$ ،
$f(x) \to -2$ عندما $x \to \infty$.

x	-1000	-100	-10	0	10	100	1000
$f(x)$	-1.99999	-1.9999	-1.997	-5	-1.98	-1.9999	-1.99999

21) **كيمياء:** يعطى معدل التفاعل R في تجربة كيميائية بالدالة $R(x) = \frac{0.5x}{x + 12}$، حيث x تركيز المحلول بالملجرام لكل لتر. (مثال 7)

a) مثّل الدالة بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانيّة.



x	0	10	100	1000	10,000
$R(x)$	0	0.2273	0.4464	0.4941	0.4994

b) صف سلوك طرفي التمثيل البياني، وماذا يعني في التجربة؟
عزز إجابتك عدديًّا.

إجابة ممكنة: يبيّن سلوك طرفي التمثيل البياني أنه إذا زاد تركيز العامل المساعد فيقترب معدل التفاعل الكيميائي من 0.5.

استعمل التبرير المنطقي لتحديد سلوك طرف التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي، عندما تقترب x من ∞. برِّر إجابتك. (مثال 8)

22) $f(u) = \dfrac{12}{u}$

0؛ إجابة ممكنة: عندما $u \to \infty$، فإن قيمة الكسر تقل. لذا فإن $f(u)$ تقترب من 0.

23) $q(x) = -\dfrac{24}{x}$

0؛ إجابة ممكنة: عندما $x \to \infty$، فإن قيمة الكسر تقل. لذا فإن $q(x)$ تقترب من 0.

24) $f(x)=\frac{0.8}{x^2}$ 0 ؛ إجابة ممكنة: عندما $x\to\infty$ ، فإن قيمة الكسر تقل. لذا فإن $f(x)$ تقترب من 0.

25) $h(r)=\frac{-1}{r^2+1}$ 0 ؛ إجابة ممكنة: عندما $r\to\infty$ ، فإن قيمة الكسر تقل. لذا فإن $h(r)$ تقترب من 0.

$$m(x)=\frac{4+x}{2x+6}$$

الإجابة $\frac{1}{2}$؛ إجابة ممكنة: عندما $x\to\infty$، فإن الكسر يقترب من $\frac{x}{2x}$، لذا فإن $m(x)$ تقترب من $\frac{1}{2}$.

$$c(x)=\frac{5x^2}{x^3+2x+1}$$

الإجابة 0؛ إجابة ممكنة: عندما $x\to\infty$، تقل قيمة الكسر. لذا فإن $c(x)$ تقترب من 0.

$$k(x) = \frac{4x^2 - 3x - 1}{11x}$$

الإجابة ∞؛ إجابة ممكنة: عندما $x \to \infty$, فإن بسط الكسر يتزايد، لذا فإن $k(x)$ تؤول إلى ∞.

$$g(x) = x^4 - 9x^2 + \frac{x}{4}$$

الإجابة ∞؛ إجابة ممكنة: عندما $x \to \infty$ ، فإن $g(x)$ تتزايد وتؤول إلى ∞.

$$p(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

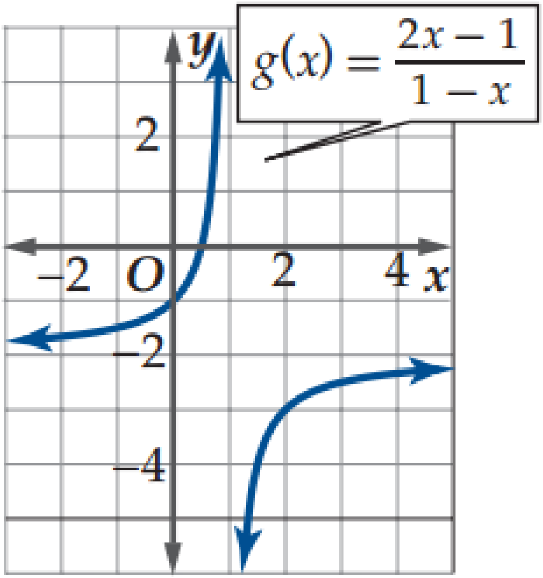
الإجابة 1 ؛ إجابة ممكنة: عندما $x \to \infty$ فإن الكسر يقترب من $\frac{x}{x}$، لذا فإن $p(x)$ تقترب من 1.

26) **فيزياء:** تُعطى طاقة الحركة لجسم متحرك بالدالة $E(m) = \frac{p^2}{2m}$ ، حيث p الزخم (حاصل ضرب كتلة الجسم في سرعته المتجهة) ، m كتلة الجسم. إذا وضع رمل في شاحنة متحركة، فماذا سيحدث إذا استمرت m في الازدياد؟ (مثال 8)

إجابة ممكنة: عندما تتزايد كتلة الجسم، فإن طاقة السيارة الحركية تقترب من 0.

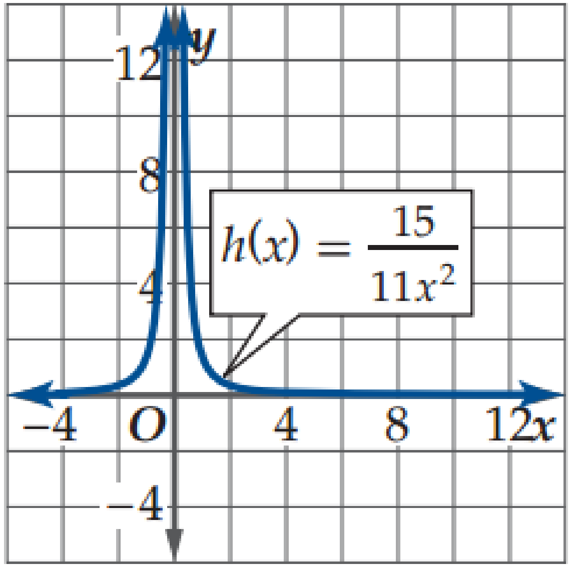
استعمل كلًّا من التمثيلين البيانيين الآتيين لتحديد قيمة أو قيم x التي تكون الدالة غير متصلة عندها، وحدد نوع عدم الاتصال، ثم استعمل المنحنى لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني. برِّر إجابتك.

(27



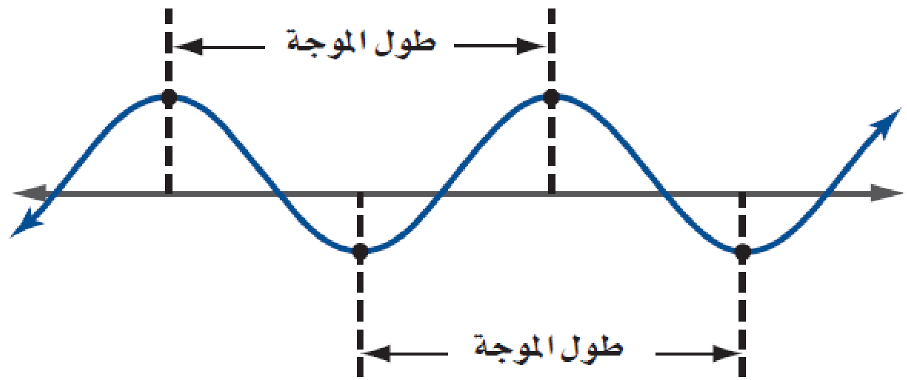
للدالة نقطة عدم اتصال لا نهائي عند $x = 1$. عندما $x \to \mp\infty$ فإن $g(x) \to -2$.

(28



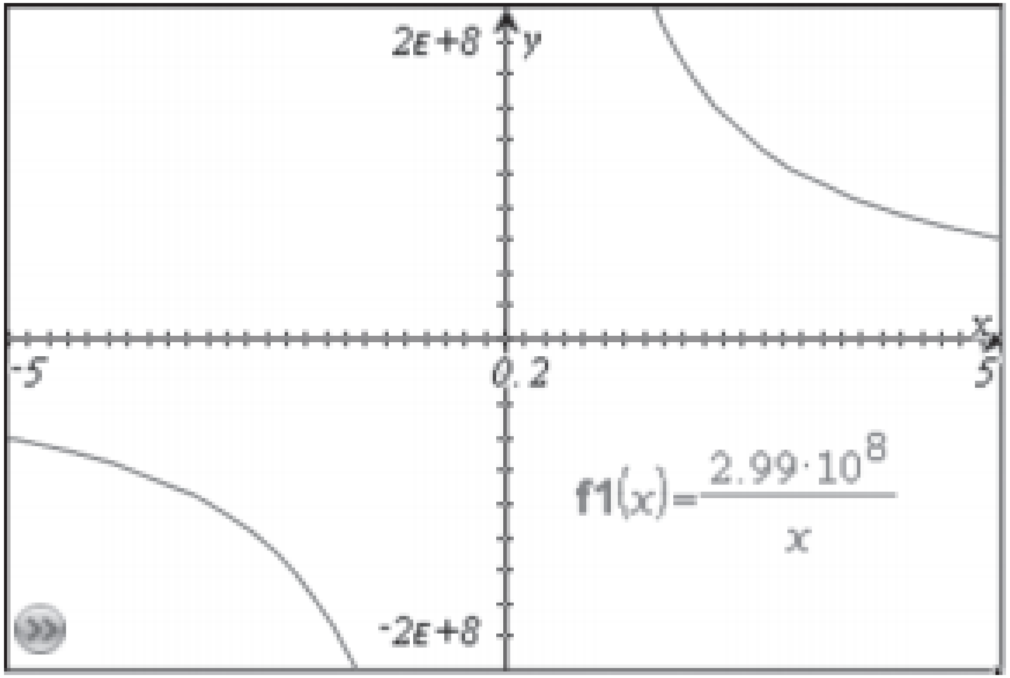
للدالة نقطة عدم اتصال لا نهائي عند
$x = 0$. عندما $x \to \mp\infty$ فإن $h(x) \to 0$.

29) **فيزياء:** تُسمّى المسافة بين نقطتين متناظرتين على موجتي ضوء متتاليتين بطول الموجه λ (ويقرأ لامدا)، و يُسمى عدد الموجات الكاملة التي تمر بنقطة خلال مدة زمنية محددة بالتردد f.



وتصف الدالة $f(\lambda) = \frac{c}{\lambda}$ العلاقة بين طول الموجة والتردد، حيث c سرعة الضوء ومقدارها $2.99 \cdot 10^8 \, m/s$.

a) مثّل الدالة بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.



b) استعمل المنحنى لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني. وعزز إجابتك عدديًّا.

x	$f(x)$
$-10{,}000$	-3.10^{4}
-1000	-3.10^{5}
-100	-3.10^{6}
0	غير معرفة
100	3.10^{6}
1000	3.10^{5}
$10{,}000$	3.10^{4}

يتضح من التمثيل البياني أن $f(x) \to 0$ عندما $x \to -\infty$ ، و $f(x) \to 0$ عندما $x \to \infty$.

c) هل الدالة متصلة؟ إذا كان الجواب لا، فعيّن نقاط عدم الاتصال.

لا، عدم اتصال لا نهائي عند λ = ٥

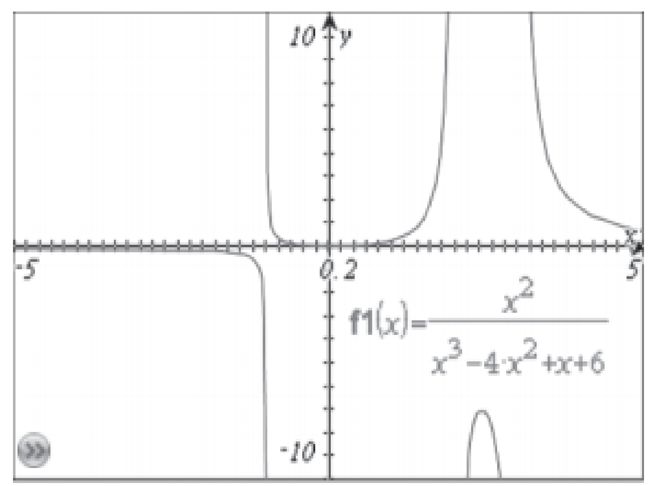
الحاسبة البيانية: مثِّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا، ثم حدد ما إذا كانت متصلة أم لا. وإذا كانت غير متصلة، فحدد نوع عدم الاتصال، وحدد نقاطه. ثمّ صف سلوك طرفي التمثيل البياني، وعيّن أصفار الدالة إن وجدت.

(30 $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$

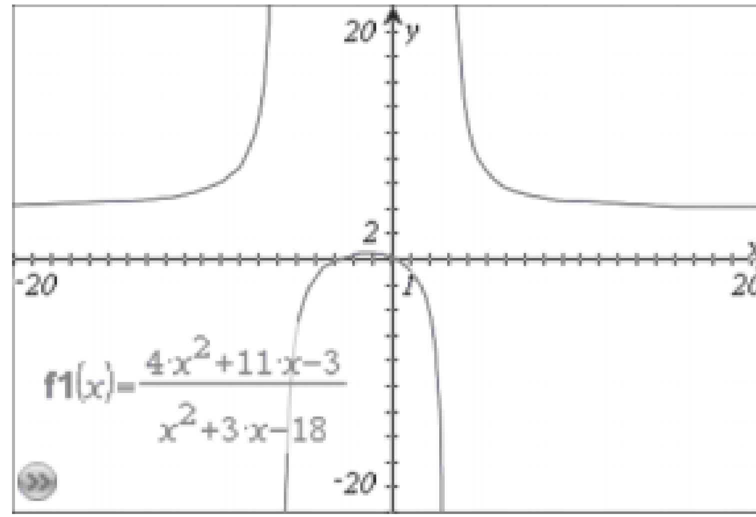
غير متصلة: عدم اتصال لا نهائي عند $x = -1, x = 2, x = 3$؛ سلوك نهاية الدالة:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

الأصفار: $x = 0$



$$h(x) = \frac{4x^2 + 11x - 3}{x^2 + 3x - 18} \quad (31$$



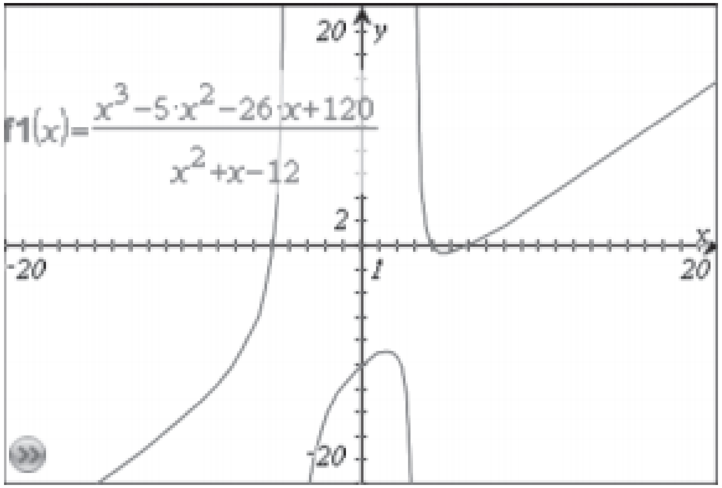
غير متصلة: عدم اتصال لا نهائي عند $x = -6$ ؛ سلوك نهاية الدالة:

$\lim_{x \to -\infty} h(x) = 4$ ؛

$\lim_{x \to \infty} h(x) = 4$ ؛

الأصفار: $x = -3, \frac{1}{4}$

(32 $h(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2 - 26x + 120}{x^2 + x - 12}$



غير متصلة: عدم اتصال لا نهائي عند

$x = -4$ ، $x = 3$؛ سلوك نهاية

الدالة: $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$

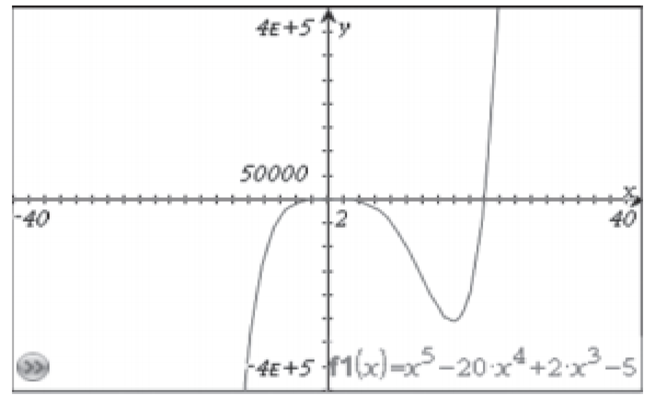
$\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \infty;$

الأصفار : $x = -5, 4, 6$

الحاسبة البيانية: مثّل بيانيًّا كلًّا من الدوال الآتية وَ صِف سلوك طرفي التمثيل البياني، وعزز إجابتك عدديًّا.

(33 $g(x) = x^5 - 20x^4 + 2x^3 - 5$

x	$f(x)$
-10000	$-1 \cdot 10^{20}$
-1000	$-1 \cdot 10^{15}$
-100	$-1 \cdot 10^{10}$
0	-5
100	$8 \cdot 10^{9}$
1000	$9.8 \cdot 10^{14}$
10000	$1 \cdot 10^{20}$

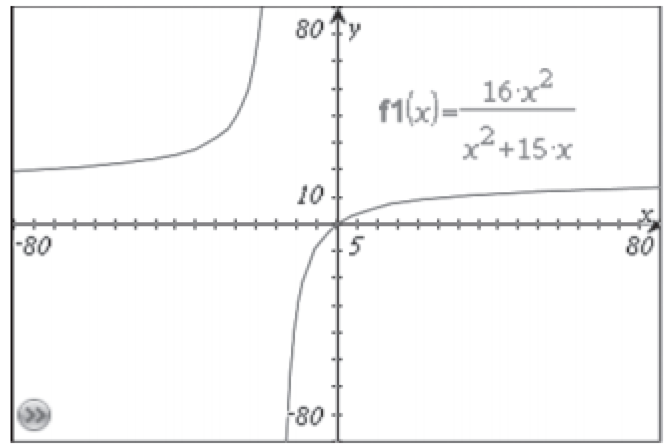


سلوك نهاية الدالة:

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$$

$$f(x) = \frac{16x^2}{x^2 + 15x} \quad (34$$



سلوك نهاية الدالة :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 16$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 16$$

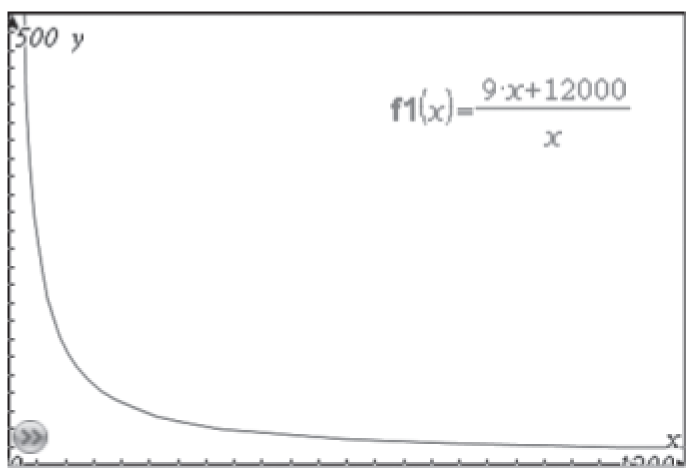
x	$f(x)$
$-10{,}000$	16.024
-1000	16.244
-100	18.824
0	غير معرفة
100	13.913
1000	15.764
10,000	15.976

35) **أعمال:** بدأ حمد مشروعًا تجاريًّا صغيرًا بالطباعة على القمصان وبيعها. إذا كانت تكلفة الطباعة على القميص الواحد 9 ريالات وتكلفة المعدات اللازمة 12000 ريال. فأجب عما يأتي:

a) اكتب دالة تبيّن معدّل تكلفة الطباعة على القميص الواحد على صورة دالة في عدد القمصان المنتجة n.

$$f(n) = \frac{9n + 12000}{n}$$

b) استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة.



c) إذا استمر ازدياد عدد القمصان المنتجة بشكل كبير، فكم سيصبح معدل تكلفة الطباعة على القميص الواحد؟

9 ريالات; إجابة ممكنة : عندما تؤول n إلى ∞، فإن $f(n)$ تؤول إلى 9.
لذا يكون معدل تكلفة القميص الواحد 9 ريالات عندما يتزايد عدد القمصان المبيعة بشكل كبير.

36) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة النهايات.

افترض أن $f(x) = \dfrac{ax^3 + b}{cx^3 + d}$، حيث a و c عددان صحيحان لا يساويان الصفر، و b و d عددان صحيحان.

a) **جدوليًّا:** افترض أن $c = 1$ و اختر ثلاث مجموعات مختلفة لقيم a, b, d . ثم اكتب الدالة في كل حالة وأكمل الجدول أدناه:

$c = 1$				
a	b	d	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$c = 1$				
a	b	d	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
3	2	4	3	3
−1	5	7	−1	−1
9	−6	8	9	9

$$f_1(x) = \frac{3x^3+2}{x^3+4}; f_2(x) = \frac{-x^3+5}{x^3+7}; f_3(x) = \frac{9x^3-6}{x^3+8}$$

b) **جدوليًا:** اختر ثلاث مجموعات مختلفة من القيم لكل متغير، مجموعة فيها $a > c$، ومجموعة فيها $a < c$، ومجموعة فيها $a = c$. ثم اكتب كل دالة، وكوّن جدولًا كما في الفرع **a**.

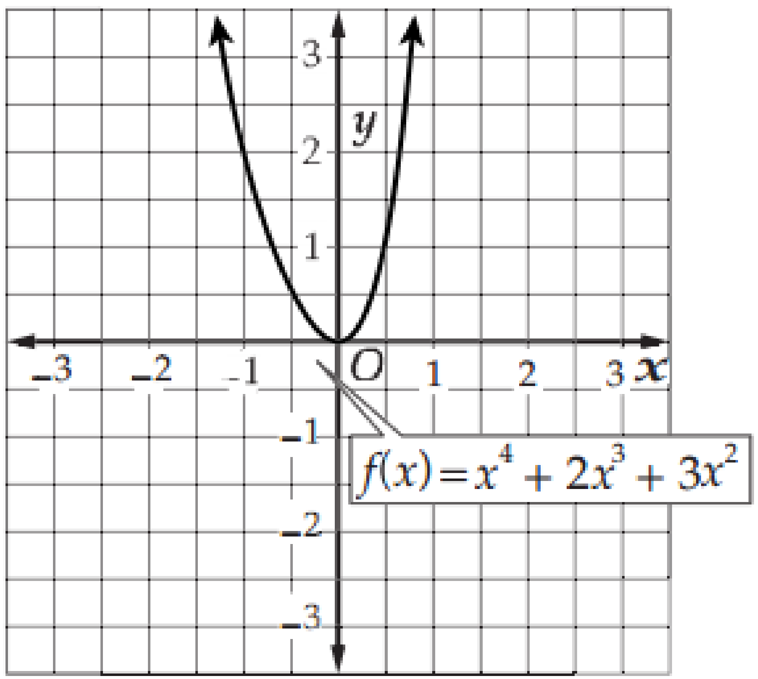
	$f(x) = \dfrac{ax^3 + b}{cx^3 + d}$					
	a	b	c	d	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
$a > c$	6	-5	3	1	2	2
$a < c$	3	4	12	13	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$a = c$	7	1	7	-4	1	1

c) **تحليليًا:** خمّن قيمة نهاية الدالة $f(x) = \dfrac{ax^3 + b}{cx^3 + d}$ عندما تقترب x من $-\infty$ ومن $+\infty$.

إجابة ممكنة: نهاية الدالة $f(x) = \dfrac{ax^3 + b}{cx^3 + d}$ عندما تقترب x من كل من ∞، و $-\infty$ تساوي $\frac{a}{c}$.

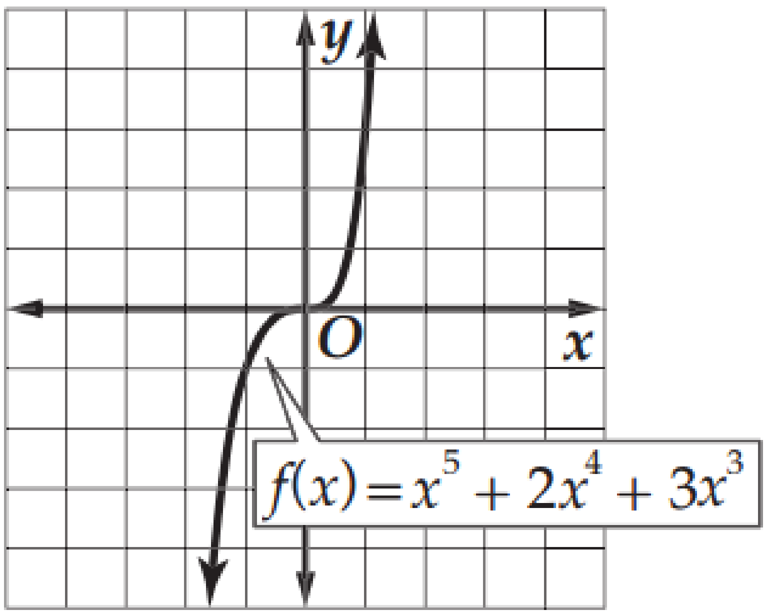
37) **الحاسبة البيانية:** مثّل 6 دوال مختلفة على الصورة $f(x) = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2}$ بيانيًّا، حيث n, a, b أعداد صحيحية غير سالبة.

a) خمّن سلوك طرفي التمثيل البياني عندما تكون n عددًا زوجيًّا موجبًا، ثم عزز إجابتك بيانيًّا.



إجابة ممكنة: إذا كان n عددًا زوجيًّا، فإن طرفي المنحنى يقتربان من ∞.

b) خمّن سلوك طرفي التمثيل البياني عندما تكون n عددًا فرديًّا موجبًا ، ثم عزز إجابتك بالتمثيل البياني.



إجابة ممكنة: إذا كان n عددًا فرديًّا، فإن طرف التمثيل البياني من اليسار يؤول إلى $-\infty$ وطرف المنحنى من اليمين يؤول إلى ∞.

مسائل مهارات التفكير العليا

تبرير: بيِّن إذا كان لكل من الدالتين الآتيتين عدم اتصال لانهائي، أم قفزي، أم قابل للإزالة عند $x = 0$. برر إجابتك.

(38 $f(x) = \dfrac{x^5 + x^6}{x^5}$

عدم اتصال قابل للإزالة. إجابة ممكنة: بما أن الدالة متصلة دائمًا إلا عندما يكون $x = 0$ وذلك لأن النهاية موجودة والدالة غير معرفة عند تلك النقطة، لذا فإن عدم الاتصال قابل للإزالة.

(39 $f(x) = \dfrac{x^4}{x^5}$

عدم اتصال لا نهائي؛ إجابة ممكنة: للدالة عدم اتصال لا نهائي ؛ لأنه عندما تقترب x من 0 من الجهتين، تؤول قيم الدالة إلى ∞ أو $-\infty$.

40) **تحدّ:** أوجد قيمة كلٍّ من a, b التي تجعل الدالة f متصلة.

الدالة f متصلة على كلٍّ من الفترات $(-\infty, -3)$ ، $(-3, 3)$ ، $(3, \infty)$، وحتى تكون متصلة على $(-\infty, +\infty)$ يجب أن تكون متصلة عند كلٍّ من العددين -3 وَ 3 وهذا يعني أن

1) $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$

$$b \times -3 + a = -b - (-3)$$

$$-3b + a = -b + 3$$

2) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$

$$\to (3)^2 + a = b \times 3 + a$$

$$9 + a = 3b + a$$

وبحل المعادلتين الآتيتين

$$-3b + a = -b + 3$$

$9 + a = 3b + a$، نجد أن

$$a = 9, b = 3$$

تبرير: أوجد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ في كلٍّ من الحالات الآتية، وبرِّر إجابتك.

(41 $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ حيث f دالة زوجية.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$،
التمثيل البياني لسلوك الدالة عند
$-\infty$ يجب أن يكون مشابهًا لسلوكها
عند ∞ للدالة الزوجية.

(42 $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ حيث f دالة فردية.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$، التمثيل البياني
لسلوك الدالة عند $-\infty$ يجب أن
يكون معاكسًا لسلوكها عند ∞ للدالة
الفردية.

43) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ حيث f دالة متماثلة حول نقطة الأصل.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ؛ لأن

$(x, y) \longrightarrow (-x, -y)$ في التماثل

حول نقطة الأصل.

44) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ حيث f دالة متماثلة حول المحور y.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ ،

لأن $y = f(-x) = f(x)$ في التماثل

حول المحور y.