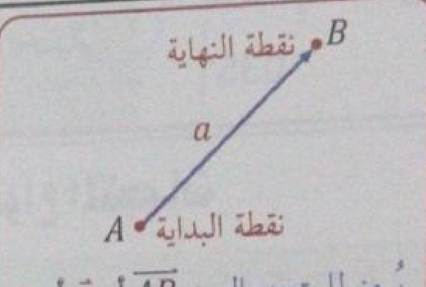
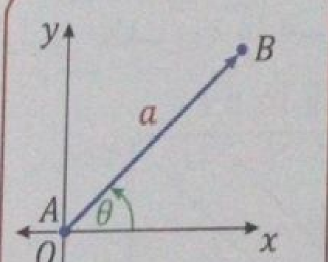
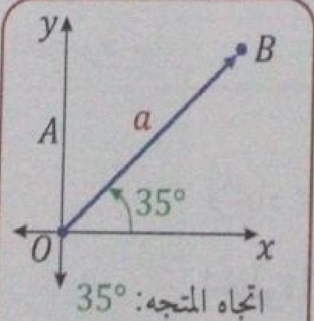
الفصل ١ : المتجهات

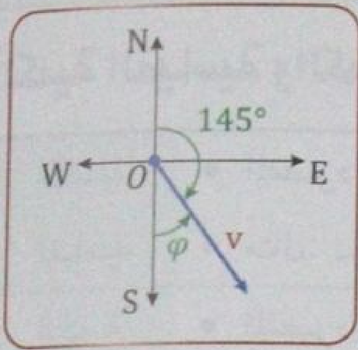
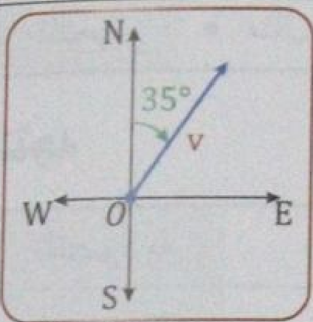
الكمية القياسية والكمية المتجهة

الكمية القياسية	• **المقصود بها**: كمية لها قيمة عددية فقط. • **مثال**: تسير سيارة بسرعة 100 km/h « السرعة هنا كمية قياسية ».
الكمية المتجهة	• **المقصود بها**: كمية لها قيمة عددية ولها اتجاه معلوم. • **مثال**: تسير سيارة بسرعة 100 km/h في اتجاه الجنوب « السرعة هنا كمية متجهة ».

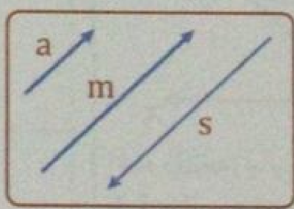
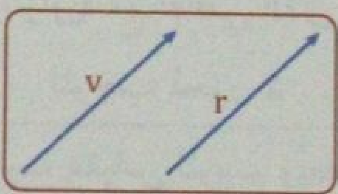
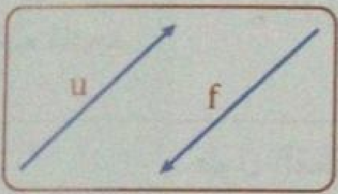
المتجه

المقصود به	كمية لها طول واتجاه معلوم	
تمثيل المتجه هندسيًا	يُمثل المتجه هندسيًا بقطعة مستقيمة متجهة لها نقطة بداية ونقطة نهاية أو سهم يُظهر القيمة والاتجاه	 يُرمز للمتجه بالرمز $\overline{AB}$ أو $\vec{a}$ أو $\boldsymbol{a}$
الوضع القياسي للمتجه	يكون المتجه في الوضع القياسي إذا كانت نقطة بداية المتجه هي نقطة الأصل	 اتجاه المتجه: قياس الزاوية θ طول المتجه: $\lvert a\rvert$
اتجاه المتجه	يساوي قياس الزاوية مع الأفقي الذي يسمى الاتجاه الموجب لمحور x	
طول المتجه	طول القطعة المستقيمة بمقياس للرسم ويُعطى بالعلاقة .. مقياس الرسم × الطول على الرسم = $\lvert a\rvert$	
مثال	الشكل المجاور يمثل المتجه $\boldsymbol{a}$ الذي اتجاهه $35°$ وطوله على الرسم 2.2 cm بمقياس الرسم 1 cm = 5 ft/s ، طول المتجه يساوي .. $\lvert a\rvert = 2.2 \times 5 = 11$ ft	 اتجاه المتجه: 35° طول المتجه: 11 ft

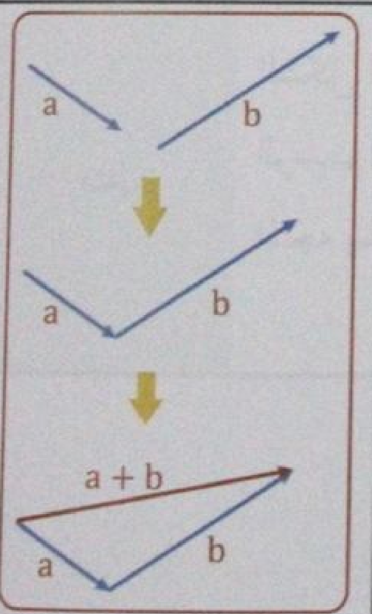
زاوية الاتجاه الربعي وزاوية الاتجاه الحقيقي للمتجه

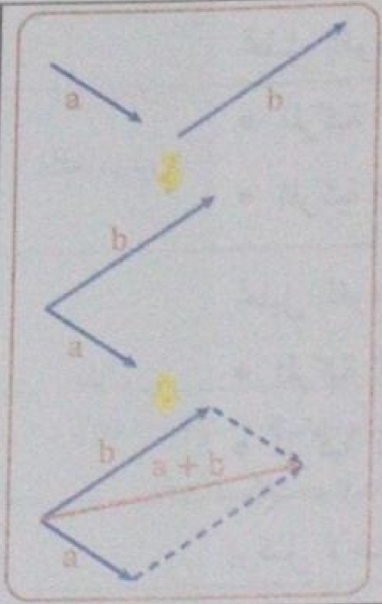
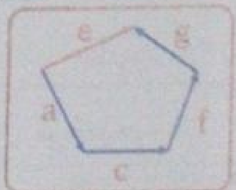
زاوية الاتجاه الربعي φ	• **المقصود بها**: قياس اتجاهي بين $0°$ و $90°$ شرق أو غرب الخط الرأسي « خط شمال ـ جنوب ». • **الرمز**: يرمز لها بالرمز φ وتقرأ فاي. • **مثال**: في الشكل المجاور زاوية الاتجاه الربعي للمتجه **v** هي $\varphi = 35°$ شرق الجنوب، وتكتب S 35° E .	
زاوية الاتجاه الحقيقي	• **المقصود بها**: قياس الزاوية مع عقارب الساعة بدءاً من الشمال. • **القياس**: يكون بثلاثة أرقام للزاوية وبدون مركبات اتجاه. • **مثال**: في الشكل المجاور زاوية الاتجاه الحقيقي للمتجه **v** هي 035° .	

أنواع المتجهات

المتجهات المتوازية	المتجهات المتكافئة	المتجهان المتعاكسان
لها الاتجاه نفسه أو اتجاهان متعاكسان وليس بالضرورة لها نفس الطول ..	لها الاتجاه نفسه والطول نفسه ..	لهما الطول نفسه ولكن اتجاهيهما متعاكسان ..
$a \parallel m \parallel s$	$v = r$	$u = -f$
		

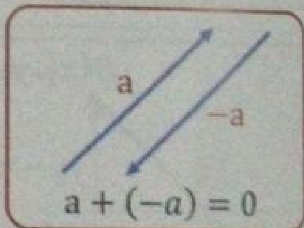
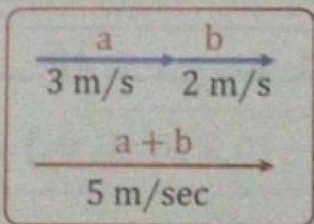
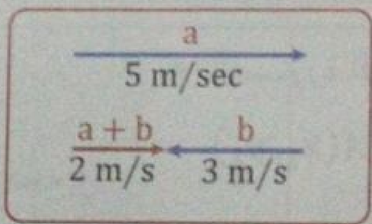
المحصلة هندسيًا

المقصود بها	جمع متجهين أو أكثر يكون الناتج متجهًا	
قاعدة المثلث	لإيجاد محصلة المتجهين a, b هندسيًا نتبع الخطوتين التاليتين: الخطوة1: نجري انسحابًا للمتجه **b** لتلتقي نقطة بدايته مع نقطة نهاية المتجه **a** . الخطوة2: محصلة المتجهين a, b هي المتجه **a + b** المرسوم من نقطة بداية **a** إلى نقطة نهاية **b** .	

قاعدة متوازي الأضلاع	لإيجاد محصلة المتجهين a, b هندسيًا نتبع الخطوات التالية: **الخطوة1:** نجري انسحابًا للمتجه b لتلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية المتجه a . **الخطوة2:** نكمل رسم متوازي الأضلاع الذي ضلعاه a, b . **الخطوة3:** محصلة المتجهين a, b هي المتجه a + b الذي يُمثل قطر متوازي الأضلاع.	
فائدة	لإيجاد محصلة ثلاثة متجهات فأكثر يُفضل استعمال قاعدة المثلث .. فمثلاً محصلة المتجهات a, c, f, g هو المتجه e	

العمليات على المتجهات

جمع المتجهات

عند جمع متجهين متعاكسين لهما الطول نفسه فإن المحصلة هي المتجه الصفري ويرمز له بالرمز $\vec{0}$ أو **0**	محصلة ناتج جمع متجهين أو أكثر لها الاتجاه نفسه هو مجموع أطوال هذه المتجهات واتجاهها هو نفس اتجاه المتجهات الأصلية	محصلة ناتج جمع متجهين متعاكسين هو القيمة المطلقة للفرق بين طولي المتجهين واتجاهها هو اتجاه المتجه الأكبر
		

ضرب متجه في عدد حقيقي

إذا ضرب المتجه **v** في عدد حقيقي k فإن طول المتجه $k\mathbf{v}$ هو $|k||\mathbf{v}|$ ..

- إذا كانت $k > 0$ فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو اتجاه **v** نفسه.
- إذا كانت $k < 0$ فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو عكس اتجاه **v** .

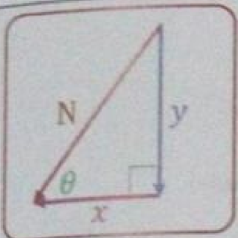
تحليل القوة

المقصود به	تحليل متجه القوة إلى مركبتين متعامدتين أحدهما أفقية والأخرى رأسية

المركبتين المتعامدتين

تحليل القوة N إلى مركبتين متعامدتين في الشكل المجاور هما ..

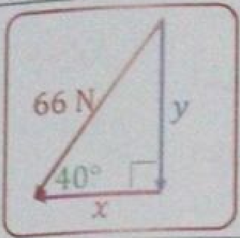
- المركبة الأفقية: $|x| = \mathrm{N}\cos\theta$.
- المركبة الرأسية: $|y| = \mathrm{N}\sin\theta$.



مثال

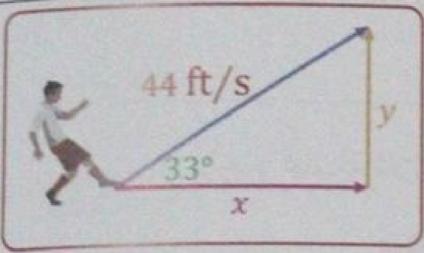
تحليل القوة 66 N إلى مركبتين متعامدتين ..

- المركبة الأفقية: $|x| = 66\cos 40° \approx 50.6$.
- المركبة الرأسية: $|y| = 66\sin 40° \approx 42.4$.



مثال توضيحي

يركل لاعب كرة قدم من سطح الأرض بسرعة مقدارها 44 ft/s وبزاوية 33° مع الأرض؛ أوجد مقدار كل من المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة.



- المركبة الأفقية: $|x| = 44\cos 33° \approx 36.9$ ft/s .
- المركبة الرأسية: $|y| = 44\sin 33° \approx 24$ ft/s .

الصورة الإحداثية لمتجه وطول المتجه

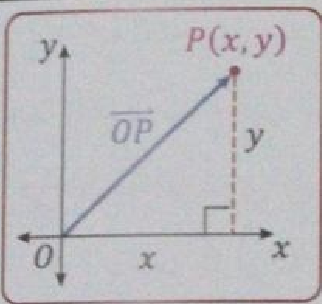
المتجه في الوضع القياسي

- الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة نهايته $P(x, y)$ هي ..

$$\overrightarrow{OP} = \langle x, y\rangle$$

- طول المتجه يُعطى بالصيغة ..

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



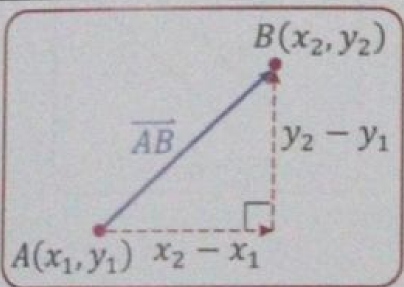
المتجه في وضع غير قياسي

- الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي ..

$$\overrightarrow{AP} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$$

- طول المتجه يُعطى بالصيغة ..

$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



مثال

- الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(1, 3)$ ونقطة نهايته $B(5, 6)$ ..

$$\overrightarrow{AP} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle = \langle 5 - 1, 6 - 3\rangle = \langle 4, 3\rangle$$

- إيجاد طول $\overrightarrow{AB}$ ..

$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(5-1)^2 + (6-3)^2} = 5$$

العمليات على المتجهات

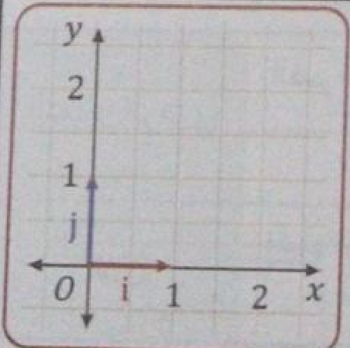
جمع وطرح المتجهات وضرب متجه في عدد حقيقي	إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ متجهين فإن .. • جمع متجهين: $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle$. • طرح متجهين: $\mathbf{a}-\mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2\rangle$. • ضرب متجه في عدد حقيقي k : $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2\rangle$
مثال توضيحي	للمتجهات $\mathbf{w} = \langle -4, 1\rangle$, $\mathbf{z} = \langle -3, 0\rangle$, $\mathbf{y} = \langle 2, 5\rangle$ أوجد $2\mathbf{w}+4\mathbf{y}-\mathbf{z}$. $2\mathbf{w}+4\mathbf{y}-\mathbf{z} = 2\langle -4,1\rangle + 4\langle 2,5\rangle - \langle -3,0\rangle$ $= \langle -8,2\rangle + \langle 8,20\rangle + \langle 3,0\rangle = \langle 3,22\rangle$

متجه الوحدة u

المقصود به	متجه طوله 1
إيجاده	نُوجد متجه الوحدة $\mathbf{u}$ في اتجاه أي متجه معلوم $\mathbf{v}$ بالعلاقة .. $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{v}}{\lvert\mathbf{v}\rvert}$
مثال	إيجاد متجه الوحدة $\mathbf{u}$ في نفس اتجاه المتجه $\mathbf{v} = \langle 3, 4\rangle$ .. $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{v}}{\lvert\mathbf{v}\rvert} = \dfrac{\langle 3,4\rangle}{\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{\langle 3,4\rangle}{5} = \langle \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\rangle$ وللتأكد أن طول متجه الوحدة يساوي 1 : $\lvert\mathbf{u}\rvert = \sqrt{\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{4}{5}\right)^2} = 1$

متجها الوحدة القياسيين

متجها الوحدة القياسيين

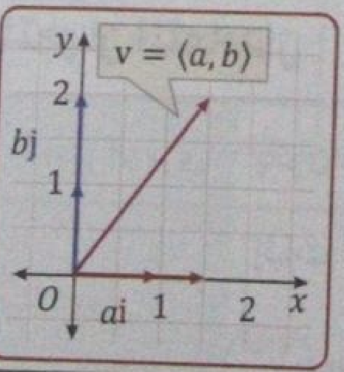


• يُرمز لمتجه الوحدة باتجاه المحور x الموجب بالرمز $\mathbf{i}$ حيث ..

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle$$

• يُرمز لمتجه الوحدة باتجاه المحور y الموجب بالرمز $\mathbf{j}$ حيث ..

$$\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$$



• يمكن استعمال متجهي الوحدة القياسيين للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ بالصورة ..

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$$

• يُسمى ناتج الجمع $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ توافقًا خطيًا لـ $\mathbf{i}, \mathbf{j}$.

مثال توضيحي

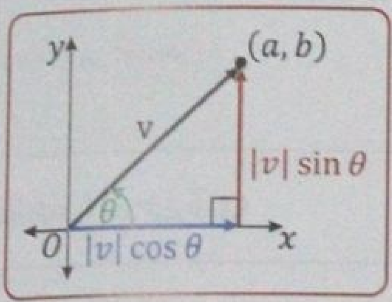
أوجد المتجه $\overrightarrow{DE}$ الذي نقطتا بدايته ونهايته $D(-3,-8), E(7,1)$ بدلالة متجهي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$.

نُوجد الصورة الإحداثية $\overrightarrow{DE}$ ثم نُعبر عن المتجه بدلالة متجهي الوحدة ..

$$\overrightarrow{DE} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle = \langle 7-(-3), 1-(-8) \rangle = \langle 10, 9 \rangle$$
$$\overrightarrow{DE} = \langle 10, 9 \rangle = 10\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$$

الصورة الإحداثية للمتجه إذا عُلم طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي

التعبير الرمزي



- يمكن تحديد اتجاه المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ باستعمال زاوية الاتجاه التي يصنعها $\mathbf{v}$ مع المحور x الموجب ..

$$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos\theta , |\mathbf{v}| \sin\theta \rangle$$

- إيجاد زاوية اتجاه المتجه من العلاقة ..

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{|\mathbf{v}| \sin\theta}{|\mathbf{v}| \cos\theta}\right) \text{ أو } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

مثال

الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ الذي طوله 6 وزاوية اتجاهه $30°$ مع الأفقي هي ..

$$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos\theta , |\mathbf{v}| \sin\theta \rangle = \langle |6| \cos 30° , |6| \sin 30° \rangle = \langle 3\sqrt{3} , 3 \rangle$$

مثال توضيحي

أوجد زاوية اتجاه المتجه $\langle -3, -8 \rangle$ مع المحور x الموجب.

نُوجد زاوية اتجاه المتجه باستعمال معادلة زاوية الاتجاه ..

$$\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-8}{-3}\right) \approx 69.4°$$

وبما أن المتجه يقع في الربع الثالث فإن: $\theta = 180° + 69.4° = 249.4°$

الضرب الداخلي لمتجهين

التعبير الرمزي

الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle , \mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ ..

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

مثال

إيجاد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u} = \langle 3, 4 \rangle , \mathbf{v} = \langle -1, 5 \rangle$ ..

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = (3 \times -1) + (4 \times 5) = 17$$

المتجهان المتعامدان

التعبير الرمزي

يكون المتجهان $\mathbf{a} , \mathbf{b}$ متعامدين إذا وفقط إذا كان ..

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

مثال

إثبات أن المتجهين $\mathbf{u} = \langle 3, 4 \rangle , \mathbf{v} = \langle -4, 3 \rangle$ متعامدان ..

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 3 \times -4 + 4 \times 3 = 0$$

$\therefore$ $\mathbf{u} , \mathbf{v}$ متجهان متعامدان

خصائص الضرب الداخلي

إذا كانت $\mathbf{u, v, w}$ متجهات وكان k عدداً حقيقياً فإن الخصائص التالية صحيحة:

الخصائص

الخاصية الإبدالية	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
خاصية التوزيع	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
خاصية الضرب في عدد حقيقي	$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$
خاصية الضرب الداخلي في المتجه الصفري	$0 \cdot \mathbf{u} = 0$
العلاقة بين الضرب الداخلي وطول المتجه	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$

فائدة

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 = \left(\sqrt{(u_1^2 + u_2^2)}\right)^2 = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$$

مثال توضيحي

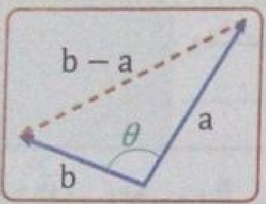
استعمل الضرب الداخلي لإيجاد طول المتجه $\mathbf{b} = \langle 12, 16 \rangle$.

بما أن $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = \lvert\mathbf{b}\rvert^2$ فإن $\lvert\mathbf{b}\rvert = \sqrt{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}}$ ..

$$\lvert\langle -1, -7 \rangle\rvert = \sqrt{\langle -1, -7 \rangle \cdot \langle -1, -7 \rangle} = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2} = 5\sqrt{2}$$

الزاوية بين متجهين

التعبير الرمزي



إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a, b}$ فإن ..

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\lvert\mathbf{a}\rvert\,\lvert\mathbf{b}\rvert}$$

مثال توضيحي

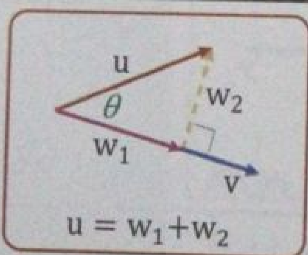
أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u} = \langle -5, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 4 \rangle$.

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\lvert\mathbf{u}\rvert\,\lvert\mathbf{v}\rvert} = \frac{\langle -5,-2 \rangle \cdot \langle 4,4 \rangle}{\lvert\langle -5,-2 \rangle\rvert \lvert\langle 4,4 \rangle\rvert} = \frac{-20+(-8)}{\sqrt{29}\sqrt{32}} = \frac{-28}{4\sqrt{58}}$$

$$\therefore\ \theta = \cos^{-1}\left(\frac{-28}{4\sqrt{58}}\right) \approx 157°$$

سقط المتجه

التعبير الرمزي



إذا كان $\mathbf{u, v}$ متجهين غير صفريين وكان $\mathbf{w_1}$ ، $\mathbf{w_2}$ مركبتي $\mathbf{u}$ فإن $\mathbf{w_1}$ يسمى مسقط المتجه $\mathbf{u}$ على المتجه $\mathbf{v}$ ويكون ..

$$\mathbf{w_1} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\lvert\mathbf{v}\rvert^2}\right)\mathbf{v}$$

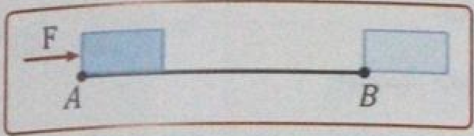
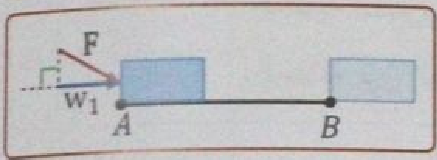
مثال

أوجد مسقط $\mathbf{u} = \langle 1, 2 \rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 8, 5 \rangle$.

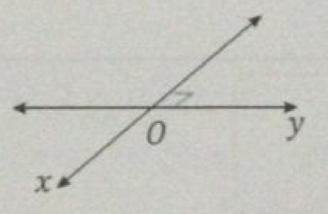
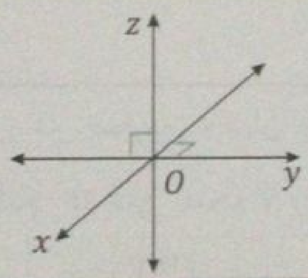
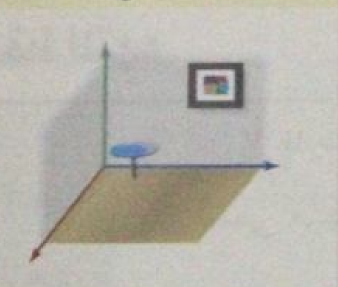
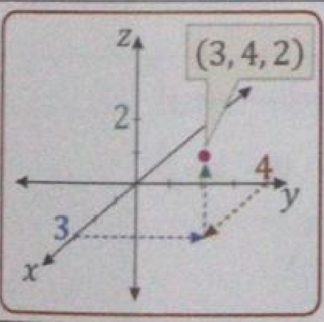
نُوجد $\mathbf{w_1}$ « مسقط $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$ » ..

$$\mathbf{w_1} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\ldots}\right)\mathbf{v} = \frac{\langle 1,2 \rangle \cdot \langle 8,5 \rangle}{\ldots}\langle 8,5 \rangle \ldots \frac{18}{\ldots} \ldots \frac{144}{\ldots}, \frac{90}{\ldots}$$

الشغل

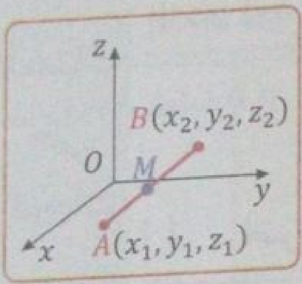
المقصود به	القوة المؤثرة على جسم لتحريكه من نقطة إلى نقطة أُخرى ويرمز له بالرمز W
التعبير الرمزي	إذا كانت $\mathbf{F}$ قوة مؤثرة على جسم لتحريكه من النقطة A إلى B فإن .. • **أولاً:** $\mathbf{F}$ توازي $\overrightarrow{AB}$ .. $W = \|\mathbf{F}\|\|\overrightarrow{AB}\|$  • **ثانيًا:** $\mathbf{F}$ لا توازي $\overrightarrow{AB}$ نأخذ المركبة الأفقية .. $W = \|\mathbf{w_1}\|\|\overrightarrow{AB}\|$ 
مثال توضيحي	يدفع إبراهيم مكنسة كهربائية بقوة مقدارها 25 N ، إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكنسة وسطح الأرض $60°$ فأوجد الشغل بالجول الذي بذله إبراهيم عند تحريك المكنسة مسافة 6 m ؟  نستعمل قاعدة مسقط الشغل W والتي فيها القوة لا توازي سطح الأرض فتكون $\mathbf{w_1}$ هي مسقط القوة 25 N على الأرض والمسافة $\overrightarrow{AB} = 6\text{m}$ هي التي تحركها إبراهيم بالمكنسة .. $\therefore\ W = \|\mathbf{w_1}\|\|\overrightarrow{AB}\| = (25\cos 60°)(6) = 75\text{ J}$

النظام الإحداثي ثلاثي الأبعاد

المقصود به	تمثيل نقطة في الفضاء بثلاثيات مرتبة من الأعداد الحقيقية تتبع محاور متعامدة x, y, z		
التعبير الهندسي	المحوران x, y بصورة تُظهر عمقًا 	إضافة محور ثالث z يمر بنقطة الأصل ويعامد المحورين x, y 	غرفة البيت تُمثل نظامًا إحداثيًا ثلاثي الأبعاد 
مثال	لتمثيل النقطة $(3, 4, 2)$ في المستوى الإحداثي ثلاثي الأبعاد نعين النقطة $(3, 4)$ في المستوى xy بإشارة ما ثم نصعد وحدتين للأعلى من الإشارة السابقة بموازاة محور z 		
فائدة	المحور الإضافي z يُقسّم الفضاء إلى 8 مناطق يُسمى كل منها الثُمن		

قانونا المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء

القانون



- المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ هي ..

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

- نقطة المنتصف M لـ $\overrightarrow{AB}$ هي ..

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

مثالان

- إيجاد المسافة بين النقطتين $A(2, 3, 1), B(5, 7, 1)$ ..

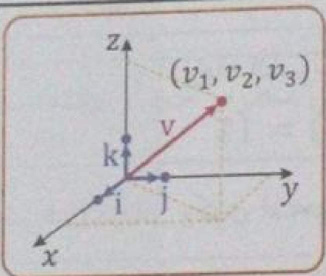
$$AB = \sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

- إيجاد نقطة المنتصف M للنقطتين $A(2, 3, 1), B(5, 7, 1)$ ..

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right) = M\left(\frac{2+5}{2}, \frac{3+7}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = M(3.5, 5, 1)$$

تعيين متجه في الفضاء

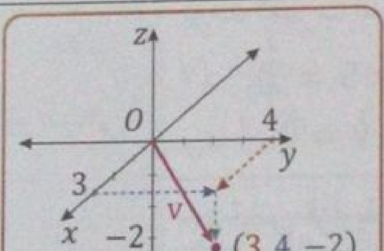
التعبير عن المتجه في الفضاء



- المتجه $\mathbf{v}$: $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.
- المتجه الصفري: $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$.
- متجهات الوحدة القياسية:

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle \quad , \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle \quad , \quad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

مثال



لتمثيل المتجه $\mathbf{v} = \langle 3, 4, -2 \rangle$ في الفضاء نُعين النقطة $(3, 4, -2)$ ثم نُمثل المتجه $\mathbf{v}$ بتوصيل خط من نقطة الأصل إلى هذه النقطة

مثال توضيحي

أوجد الصورة الإحداثية وطول المتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-1, 4, 6)$ ونقطة نهايته $B(3, 3, 8)$ ، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$.

الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ ..

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle = \langle 3 - (-1), 3 - 4, 8 - 6 \rangle = \langle 4, -1, 2 \rangle$$

ولإيجاد طول المتجه $\overrightarrow{AB}$ نجد أن ..

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(4)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{21}$$

والآن ـ نوجد ـ متجه الوحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\overrightarrow{AB}$ ..

$$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\langle 4, -1, 2 \rangle}{\sqrt{21}} = \left\langle \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{-1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}} \right\rangle$$

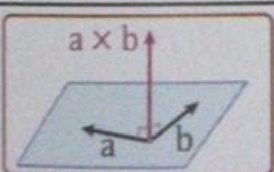
العمليات على المتجهات في الفضاء

العمليات على المتجهات	إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ متجهين في الفضاء وكان k عددًا حقيقيًا فإن ..
	جمع متجهين: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$
	طرح متجهين: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$
	ضرب متجه في عدد حقيقي: $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$
مثال توضيحي	للمتجهات $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle, \mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle, \mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$ أوجد $3\mathbf{y} + 3\mathbf{z} - 6\mathbf{w}$. $3\mathbf{y} + 3\mathbf{z} - 6\mathbf{w} = 3\langle 3, -6, 2 \rangle + 3\langle -2, 0, 5 \rangle - 6\langle -1, 4, -4 \rangle$ $= \langle 9, -18, 6 \rangle + \langle -6, 0, 15 \rangle + \langle 6, -24, 24 \rangle = \langle 9, -42, 45 \rangle$

الضرب الداخلي في الفضاء وشرط التعامد

التعبير الرمزي	الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ يُعرف بالعلاقة .. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
مثال	إيجاد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{v} = \langle -1, 5, 4 \rangle$, $\mathbf{u} = \langle 3, 2, 1 \rangle$ .. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = (3 \times -1) + (2 \times 5) + (1 \times 4) = 11$
شرط التعامد	يكون المتجهان $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ متعامدين في الفضاء إذا وفقط إذا كان .. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$
مثال توضيحي1	أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{v} = \langle 5, 7, 5 \rangle$, $\mathbf{u} = \langle 3, -5, 4 \rangle$ ثم تحقق إن كانا متعامدين. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 3 \times 5 + (-5) \times 7 + 4 \times 5 = 0$ وبما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ فإن المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ متعامدان.
مثال توضيحي2	جِد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ إلى اقرب منزلة عشرية. الصورة الإحداثية للمتجهين هي: $\mathbf{u} = \langle -4, 2, 1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 4, 0, 3 \rangle$ نوجد ـ الآن ـ قياس الزاوية بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ باستعمال قانون الزاوية بين متجهين .. $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} = \dfrac{\langle -4, 2, 1 \rangle \cdot \langle 4, 0, 3 \rangle}{\|\langle -4, 2, 1 \rangle\| \|\langle 4, 0, 3 \rangle\|} = \dfrac{-16 + 0 + 3}{\sqrt{21} \times 5} = \dfrac{-13}{5\sqrt{21}}$ $\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{-13}{5\sqrt{21}}\right) \approx 124.6^\circ$

الضرب الاتجاهي لمتجهين

المقصود به	متجه عمودي على المستوى الذي يحوي المتجهين a, b ويُرمز له بالرمز $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ويُقرأ a cross b 

التعبير الرمزي

إذا كان $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}\,,\ \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$

فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين a, b هو المتجه ..

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

مثال توضيحي

جد مساحة متوازي أضلاع فيه $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \ ,\ \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ضلعان متجاوران.

نُوجد حاصل الضرب الاتجاهي $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ، ثم نوجد طول $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ..

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -6 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= [(-2)(1) - (3)(3)]\mathbf{i} + [(-6)(1) - (3)(4)]\mathbf{j} + [(-6)(3) - (-2)(4)]\mathbf{k}$$

$$= -11\mathbf{i} + 18\mathbf{j} - 10\mathbf{k} = \langle -11, 18, -10 \rangle$$

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{(-11)^2 + (18)^2 + (-10)^2} \approx 23$$

∴ مساحة متوازي الأضلاع تساوي 23 وحدة مربعة تقريبًا

الضرب القياسي للثلاثيات

المقصود به

التقاء ثلاثة متجهات في نقطة البداية فتكون أحرفًا متجاورة لمتوازي سطوح حجمه هو القيمة المطلقة للضرب القياسي للثلاثيات

التعبير الرمزي

إذا كان ..

$$\mathbf{t} = t_1\mathbf{i} + t_2\mathbf{j} + t_3\mathbf{k}$$
$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$$
$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

فإن الضرب القياسي للثلاثيات هو ..

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

مثال توضيحي

جد حجم متوازي سطوح فيه $\mathbf{t} = 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}\,,\ \mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\,,\ \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ أحرف متجاورة.

حجم متوازي السطوح هو القيمة المطلقة للضرب القياسي للثلاثيات للمتجهات t, u, v ..

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -6 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}(0) - \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}(2) + \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}(-5)$$

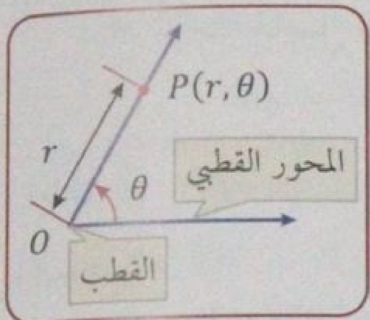
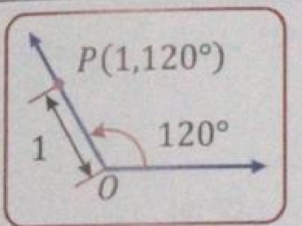
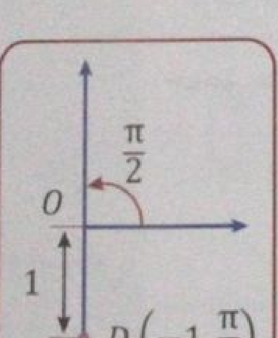
$$= 0 - \big((-6)(1) - (3)(4)\big)(2) + \big((-6)(3) - (-2)(4)\big)(-5)$$

$$= 18(2) - 10(-5) = 86$$

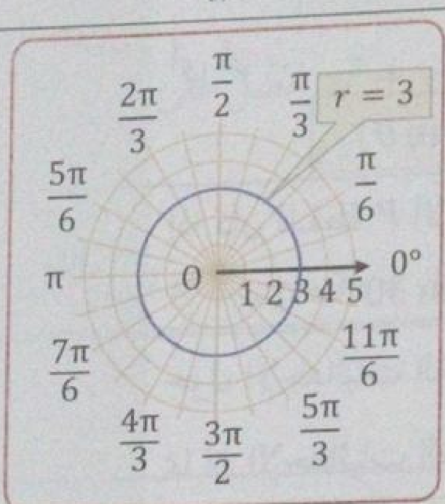
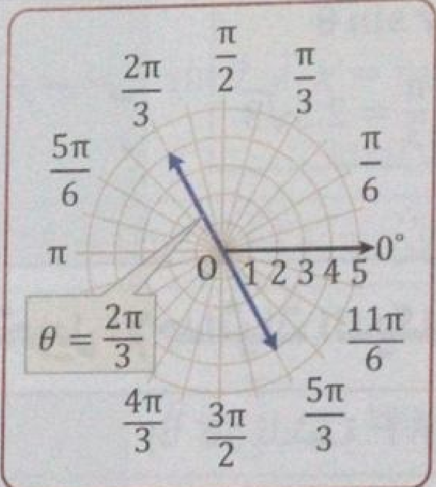
∴ حجم متوازي السطوح يساوي 86 وحدة مكعبة

الفصل ٢ : الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

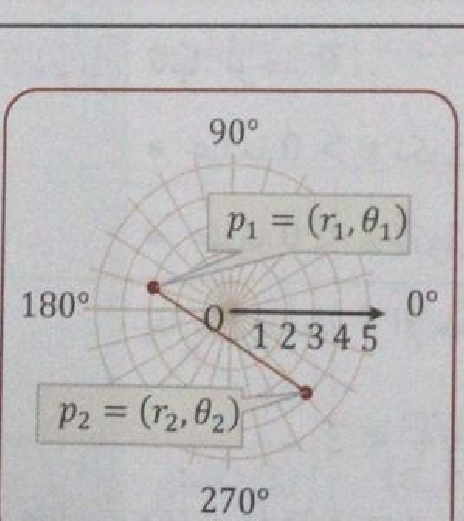
نظام الإحداثيات القطبية « المستوى القطبي »

مكوناته	• القطب: نقطة الأصل O . • المحور القطبي: شعاع يمتد أفقيًا من القطب لليمين. • الإحداثيات القطبية لنقطة $P(r,\theta)$: r هي المسافة المتجهة من القطب للنقطة P و θ هي الزاوية المتجهة من المحور القطبي إلى $\overrightarrow{OP}$. 
تمثيل النقطة $p(r,\theta)$	• إذا كانت θ موجبة فإن الدوران بعكس اتجاه عقارب الساعة بدءًا من المحور القطبي. • إذا كانت θ سالبة فإن الدوران مع اتجاه عقارب الساعة بدءًا من المحور القطبي. • إذا كانت r موجبة فإن P واقعة على ضلع الانتهاء للزاوية θ . • إذا كانت r سالبة فإن P واقعة على الشعاع المقابل « الامتداد » لضلع الانتهاء للزاوية θ .
مثال	تمثيل النقطة $P(1,120°)$ .. بما أن $\theta = 120 > 0$ فإن الدوران بعكس اتجاه عقارب الساعة وبما أن $r = 1 > 0$ فإن P واقعة على ضلع الانتهاء للزاوية θ 
تنبيهان	• يمكن تمثيل النقطة (r,θ) بالإحداثيات $(r,\theta + 360°n)$ أو $(-r,\theta + (2n+1)180°)$ ؛ حيث n عدد صحيح. • يمكن تمثيل النقطة (r,θ) بالإحداثيات $(r,\theta + 2n\pi)$ أو $(-r,\theta + (2n+1)\pi)$ ؛حيث n عدد صحيح وθ مقيسة بالراديان.
مثال توضيحي	مثل النقطة $D\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$. بما أن $\theta = \frac{\pi}{2}$ « موجبة » فإننا نرسم ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{\pi}{2}$ بحيث يكون المحور القطبي هو ضلع الابتداء لها بدوران عكس عقارب الساعة. وبما أن $r = -1$ « سالبة » فإننا نمد ضلع الانتهاء في الاتجاه المقابل ونُعين عليه النقطة D على بعد وحدة واحدة من القطب O كما بالشكل المجاور. 

التمثيل البياني للمعادلات القطبية

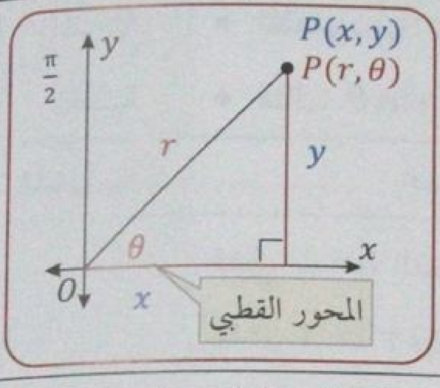
المعادلة القطبية	• المقصود بها: معادلة معطاه بدلالة الإحداثيات القطبية. • مثال: $r = 2\sin\theta$.
تمثيلها بيانيًا	مجموعة كل النقاط (r,θ) التي تحقق إحداثياتها المعادلة القطبية
مثال1	تمثيل المعادلة القطبية $r = 3$ .. بما أن $r = 3$ فإن جميع النقاط على الصورة $(3,\theta)$ والتي تبعد 3 وحدات من نقطة الأصل « القطب O » تكون حلا للمعادلة. ∴ التمثيل البياني هو دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 3 
مثال2	تمثيل المعادلة القطبية $\theta = \frac{2\pi}{3}$ بيانيًا .. حلول المعادلة $\theta = \frac{2\pi}{3}$ عبارة عن جميع النقاط $\left(r, \frac{2\pi}{3}\right)$ حيث r أي عدد حقيقي. ∴ التمثيل البياني هو جميع النقاط الواقعة على المستقيم الذي يصنع زاوية $\frac{2\pi}{3}$ مع المحور القطبي الموجب 

المسافة بالصيغة القطبية

المقصود بها	إذا كانت $P_1 = (r_1, \theta_1), P_2 = (r_2, \theta_2)$ نقطتان في المستوى القطبي فإن المسافة P_1P_2 تُعطى بالصيغة .. $$P_1P_2 = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$
مثال	المسافة بين النقطتين $P_1 = (1, 20^\circ), P_2 = (2, 80^\circ)$ .. $$P_1P_2 = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$ $$= \sqrt{1^2 + 2^2 - 2(1)(2)\cos(80^\circ - 20^\circ)}$$ $$= \sqrt{3}$$ 

تحويل الإحداثيات القطبية للإحداثيات الديكارتية

طريقة التحويل



إذا كان للنقطة P الإحداثيات القطبية (r,θ) فإن الإحداثيات الديكارتية (x,y) للنقطة P هي ..

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

أي أن ..

$$(x,y) = (r\cos\theta \,, r\sin\theta)$$

مثال

إذا كان للنقطة P الإحداثيات القطبية $(2,30^\circ)$ فإن إحداثياتها الديكارتية (x,y) هي ..

$$x = r\cos\theta = 2\ \cos 30^\circ = \sqrt{3} \quad , \quad y = r\sin\theta = 2\sin 30^\circ = 1$$

مثال توضيحي

حول الإحداثيات القطبية للنقطة $S\left(5,\frac{\pi}{3}\right)$ للإحداثيات الديكارتية.

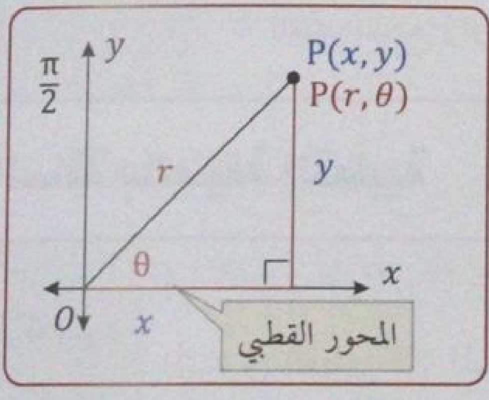
بما أن الإحداثيات القطبية للنقطة S هي $\left(5,\frac{\pi}{3}\right)$ فإن $r = 5, \theta = \frac{\pi}{3}$.

$y = r\sin\theta$	صيغ التحويل	$x = r\cos\theta$
$y = 5\sin\frac{\pi}{3} = 2.5\sqrt{3}$	عوضنا بـ $r = 5\,,\ \theta = \frac{\pi}{3}$	$x = 5\cos\frac{\pi}{3} = 2.5$

$\therefore$ الإحداثيات الديكارتية للنقطة S هي $\left(2.5, 2.5\sqrt{3}\right)$

تحويل الإحداثيات الديكارتية للإحداثيات القطبية

طريقة التحويل



إذا كان للنقطة P الإحداثيات الديكارتية (x,y) فإن الإحداثيات القطبية (r,θ) للنقطة P هي ..

أولاً: نُوجد r بالصيغة $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

ثانيًا: نُوجد θ ..

- عندما $x > 0$ تكون $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$.
- عندما $x < 0$ تكون $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$ **أو** $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + 180^\circ$.

مثال

إذا كان للنقطة P الإحداثيات الديكارتية $\left(1,\sqrt{3}\right)$ فإن إحداثياتها القطبية (r,θ) هي ..

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

وبما أن $x = 1 > 0$ فإن ..

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = 60^\circ$$

أي أن الإحداثيات القطبية للنقطة $\left(1,\sqrt{3}\right)$ هي $(2,60^\circ)$

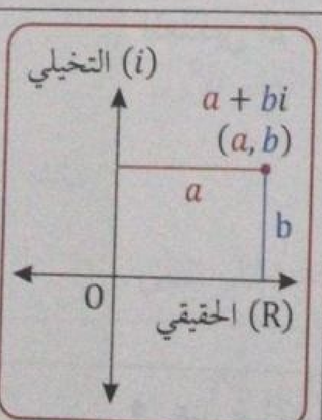
تحويل المعادلات الديكارتية للقطبية

طريقة التحويل	(1) نُعوض عن x بـ $r\cos\theta$ وعن y بـ $r\sin\theta$. (2) نُبسط المعادلة الناتجة باستعمال الطرق الجبرية والمتطابقات المثلثية.
مثال	تحويل المعادلة $x^2+y^2=3$ للصورة القطبية .. (1) نُعوض عن x بـ $r\cos\theta$ وعن y بـ $r\sin\theta$ في $x^2+y^2=3$ نحصل على .. $(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2=3$ (2) نُبسط المعادلة بأخذ r^2 عاملاً مشتركًا .. $r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=3 \Rightarrow r^2(1)=3 \Rightarrow r^2=3 \Rightarrow r=\sqrt{3}$

تحويل المعادلات القطبية للديكارتية

طريقة التحويل	(1) نستخدم الصيغ التالية بحسب ما تحتاجه المعادلة: $r^2=x^2+y^2$ أو $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ أو $x=r\cos\theta$ أو $y=r\sin\theta$ (2) نُبسط المعادلة الناتجة باستعمال الطرق الجبرية والمتطابقات المثلثية.
تنبيه	عندما $x>0$ تكون $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ و عندما $x<0$ تكون $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)+\pi$
مثال	تحويل المعادلة $\theta=\frac{\pi}{3}$ للإحداثيات الديكارتية .. $\theta=\frac{\pi}{3} \Rightarrow \tan\theta=\tan\frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{y}{x}=\sqrt{3} \Rightarrow y=\sqrt{3}\,x$

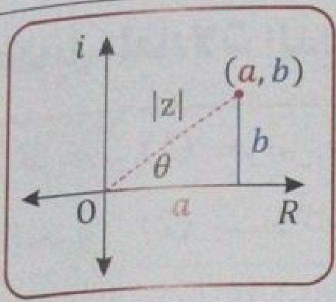
العدد المركب

صورته العامة	يُكتب العدد المركب بالصورة الديكارتية $a+bi$ ؛ حيث a الجزء الحقيقي و bi الجزء التخيلي	
مكونات المستوى المركب	• محور أفقي « المحور الحقيقي »: يُعين عليه الجزء الحقيقي a . • محور رأسي « المحور التخيلي »: يُعين عليه الجزء التخيلي bi . فائدة: يُسمى المستوى المركب بمستوى آرجاند.	
تمثيل العدد المركب	نُمثل العدد المركب $a+bi$ بتحديد الزوج المرتب (a,b) على المستوى المركب	

القيمة المطلقة للعدد المركب

القيمة المطلقة للعدد المركب $z = a + bi$ يُرمز لها بـالرمز $|z|$
ونوجدها بالعلاقة ..

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



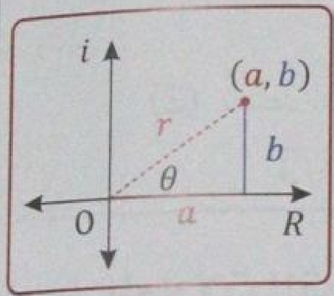
الصورة القطبية للعدد المركب

الصورة القطبية للعدد المركب $z = a + bi$ هي ..

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

حيث:

- $a = r\cos\theta \ , \ b = r\sin\theta \ , \ r = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ عندما $a > 0$.
- $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$ عندما $a < 0$.



تنبيه

إذا كانت $a = 0$ فإن $\theta = \frac{\pi}{2}$ عندما $b > 0$ و $\theta = -\frac{\pi}{2}$ عندما $b < 0$

فائدة

في العدد المركب $a + bi$ إذا كانت $b = 0$ فإن العدد المركب يكون عددًا حقيقيًا

ضرب الأعداد المركبة على الصورة القطبية وقسمتها

صيغة الضرب

لأي عددين مركبين $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ و $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ ..

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

صيغة القسمة

لأي عددين مركبين $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ و $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ يكون ..

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

حيث: $z_2 \neq 0 , r_2 \neq 0$.

مثال

للعددين المركبين $z_1 = 6(\cos 40° + i\sin 40°)$ و $z_2 = 2(\cos 10° + i\sin 10°)$ ..

$$z_1 \cdot z_2 = 6 \cdot 2[\cos(40° + 10°) + i\sin(40° + 10°)]$$
$$= 12[\cos(50°) + i\sin(50°)]$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{2}[\cos(40° - 10°) + i\sin(40° - 10°)]$$
$$= 3[\cos(30°) + i\sin(30°)]$$

فائدتان

- عند ضرب عددين مركبين نضرب المقياسين ونجمع السعتين.
- عند قسمة عددين مركبين نقسم المقياسين ونطرح السعتين.

نظرية ديموافر

نصها	إذا كان $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ عدداً مركبًا على الصورة القطبية وكان n عدداً صحيحًا موجبًا فإن .. $$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$$
مثال	إذا كان $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ فإن .. $$z^2 = \left[3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^2 = 3^2\left[\cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$ $$= 9(\cos\pi + i\sin\pi)$$

الجذور النونية المختلفة

المقصود بها	لأي عدد صحيح موجب n فإن للعدد المركب $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ عدد n من الجذور النونية المختلفة
إيجادها	نُوجد الجذور النونية المختلفة للعدد المركب $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ بالصيغة .. $$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$ حيث: $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$.
مثال	إيجاد الجذور التربيعية للعدد المركب $4(\cos\pi + i\sin\pi)$ .. بما أن مطلوب الجذور التربيعية للعدد $4(\cos\pi + i\sin\pi)$ فإن $\theta = \pi\ ,\ r = 4\ ,\ n = 2$ ؛ ومنه فإن .. الجذور هي $4^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2}\right)$ ، حيث $k = 0, 1$ • الجذر الأول عند $k = 0$ .. $$\text{الجذر الأول} = 4^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi+2(0)\pi}{2} + i\sin\frac{\pi+2(0)\pi}{2}\right) = 2i$$ • الجذر الثاني عند $k = 1$ .. $$\text{الجذر الثاني} = 4^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi+2(1)\pi}{2} + i\sin\frac{\pi+2(1)\pi}{2}\right) = -2i$$
فائدتان	• لجميع الجذور النونية المختلفة لأي عدد مركب المقياس نفسه ويساوي $r^{\frac{1}{n}}$. • سعة الجذر الأول تساوي $\frac{\theta}{n}$ ثم تزداد الجذور الأخرى على التوالي بإضافة $\frac{2\pi}{n}$.

الجذور النونية للعدد واحد

طريقة إيجادها	(1) نضع العدد 1 على الصورة القطبية $1(\cos 0 + i\sin 0)$. (2) نُوجد الجذور النونية المختلفة للعدد المركب $1(\cos 0 + i\sin 0)$ بالصيغة .. $1^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{n} + i\sin\frac{0+2k\pi}{n}\right)$ حيث $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$.
مثال	إيجاد الجذور التكعيبية للعدد 1 .. (1) نضع العدد 1 على الصورة القطبية $1(\cos 0 + i\sin 0)$. (2) بما أن مطلوب الجذور التكعيبية للعدد $1(\cos 0 + i\sin 0)$ فإن $n = 3, r = 1, \theta =$ 0 ومنه فإن .. الجذور هي $1^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{3} + i\sin\frac{0+2k\pi}{3}\right)$ ، حيث $k = 0, 1, 2$ • الجذر الأول عند $k = 0$ .. الجذر الأول $= 1^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{0+2(0)\pi}{3} + i\sin\frac{0+2(0)\pi}{3}\right) = 1$ • الجذر الثاني عند $k = 1$ .. الجذر الثاني $= 1^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{0+2(1)\pi}{3} + i\sin\frac{0+2(1)\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ • الجذر الثالث عند $k = 2$ .. الجذر الثالث $= 1^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{0+2(2)\pi}{3} + i\sin\frac{0+2(2)\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
فائدتان	• الجذور النونية المختلفة للعدد واحد تقع جميعًا على دائرة الوحدة. • لجميع الجذور النونية المختلفة للعدد واحد المقياس نفسه ويساوي 1 .

الفصل ٣ : الاحتمال والإحصاء

الدراسة التجريبية

المقصود بها	إجراء تعديل متعمد على الأشخاص أو الحيوانات أو الأشياء قيد الدراسة وملاحظة استجاباتها
مثال	لاختبار طريقة جديدة للتدريس نُقسم الطلاب إلى مجموعتين .. • تجريبية: تتم عليها التجربة. • ضابطة: لا تتم التجربة عليها أو تتم بصورة شكلية.

الدراسة المسحية

المقصود بها	جمع بيانات أو استفتاء عن الأشياء أو الأفراد دون تعديل فيها
مثال1	لعمل دراسة مسحية على المجتمع السعودي لأخذ رأيه في استعمال المترو في المملكة تسمى تعداداً عامًا « المجتمع الكلي » أما إذا تم اختيار عدد محدود من أفراد المجتمع فتسمى عينة
نوعا العينة	• **عينة متحيزة**: يتم تفضيل بعض أقسام المجتمع على باقي الأقسام. • **عينة غير متحيزة**: يتم اختيارها عشوائيًا ولا تعتمد على خاصية تم تحديدها مسبقًا.
مثال توضيحي	حدد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يلي عينة متحيزة أم غير متحيزة: (1) سؤال كل لاعب في فريق كرة السلة عن الرياضة التي يحب مشاهدتها على التلفاز. (2) الذهاب إلى حي سكني وسؤال 100 شخص اختيروا عشوائيًا عن رياضتهم المفضلة. (1) متحيزة لأن المجموعة المختارة محددة بفريق السلة الرياضي. (2) غير متحيزة لأن العينة أُختيرت عشوائيًا ولا تعتمد على خاصية تم تحديدها مسبقًا.

الدراسة بالملاحظة

المقصود بها	ملاحظة الأشياء أو الأفراد دون أي محاولة للتأثير في النتائج
مثال	لمعرفة تأثير حمل الأثقال على قصر القامة للأفراد نجري دراسة بالملاحظة لمدة معينة ولعدد معين من الأفراد يحملون الأثقال ومثلهم لا يحملون الأثقال لنفس المدة

الارتباط والسببية

الارتباط	وجود ظاهرتين وكل منهما تؤثر في الأخرى وهو سهل الملاحظة
مثال	عندما تظهر الدراسات أن الفرد يكون نشيطًا عندما يستيقظ باكراً فهو ارتباط بين ظاهرتين
السببية	وجود ظاهرتين على أن وقوع إحداهما يكون سببًا مباشراً لوقوع الظاهرة الأخرى
مثال	عندما نرى الأرض مبللة فإن السماء قد أمطرت هي علاقة سببية بين ظاهرتين

مقاييس النزعة المركزية

المقصود بها	البيانات التي تشتمل على متغير واحد وأبرزها الوسط والوسيط والمنوال
مثال	عند مشاركة فرد في سباق للجري عدة مرات ويسجل زمن في كل مرة فإن الأزمنة المسجلة له هي بيانات تشتمل على متغير واحد
مقاييس النزعة المركزية	(انظر الجدول أدناه)
القيمة المتطرفة	واحدة من البيانات أكبر أو أقل بكثير من بقية القيم
المَعلَمة	مقياس يصف خاصية في المجتمع الكلي
الإحصائي	يصف خاصية في العينة
مثال توضيحي	تمنح مؤسسة جائزة كبرى قيمتها 20000 ريال و 30 جائزة أخرى قيمة كل منها 500 ريال؛ أي مقاييس النزعة المركزية يلائم البيانات بصورة أفضل؟ ولماذا؟ المنوال هو المقياس الأنسب لأن غالبية القيم متساوية.

	التعريف	متى يستعمل؟
الوسط	{ قسمة مجموع القيم على عددها }	عندما لا تكون هناك قيم متطرفة
الوسيط	{ العدد الذي يتوسط القيم بعد ترتيبها }	عندما تكون هناك قيم متطرفة
المنوال	{ العدد الأكثر تكرارًا }	في البيانات التي تتكرر فيها قيم عديدة

هامش خطأ المعاينة

المقصود به	الفترة التي تدل على مدى اختلاف استجابة العينة عن المجتمع الكلي
التعبير الرمزي	عند سحب عينة حجمها n من مجتمع كلي فإنه يمكن تقريب هامش الخطأ بالقانون: $\boxed{\text{هامش الخطأ} = \pm\frac{1}{\sqrt{n}}}$
مثال	إيجاد هامش الخطأ لدراسة مسحية عشوائية تشمل 100 طالب بالمدرسة أفاد 95% منهم أن الجوالات ضرورية لهم .. $\text{هامش الخطأ} = \pm\frac{1}{\sqrt{n}} = \pm\frac{1}{\sqrt{100}} = \pm 0.1$

مقاييس التشتت

المقصود بها	مقدار تباعد البيانات أو تقاربها
مقياسا التشتت	• **التباين**: يقيس مدى تباعد مجموعة البيانات من الوسط أو تقاربها. • **الانحراف المعياري**: هو الجذر التربيعي الموجب للتباين.

	الانحراف المعياري للعينة s	الانحراف المعياري للمجتمع σ
نوعا الانحراف المعياري	$s=\sqrt{\dfrac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2}{n-1}}$ حيث: $\bar{x}$ الوسط للعينة ويقرأ x بار، n عدد قيم العينة.	$\sigma=\sqrt{\dfrac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2}{n}}$ حيث: μ الوسط للمجتمع ويقرأ ميو، n عدد قيم المجتمع.
فائدتان	• عندما يكون الوسط للمجتمع الكلي μ معلومًا يمكن أن يحل مكان الوسط $\bar{x}$. • كلما كبر الانحراف المعياري زاد تباعد قيم البيانات من الوسط.	

الاحتمال المشروط

المقصود به: وقوع حادثة B بشرط وقوع حادثة أخرى A

التعبير الرمزي: إذا كانت A, B حادثتين غير مستقلتين فإن الاحتمال المشروط لـ B إذا وقعت A هو ..

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

حيث: $P(A)\neq 0$.

مثال: رُمِيَ مكعب مرقم مرة واحدة وكان العدد الظاهر على وجه المكعب عددًا فرديًا « الشرط »، ونريد إيجاد احتمال أن يكون هذا العدد 5 ..

نفرض أن A الحادثة التي يكون فيها العدد الظاهر فرديًا؛ ومنه فإن ..

$$P(A)=\frac{1}{2}$$

ولتكن B الحادثة التي يظهر فيها العدد 5 ومنه ..

$$P(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

$$\therefore\quad P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{6}\div\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

الجداول التوافقية

المقصود بها: تسجيل بيانات ضمن خلايا تُمثل تكرارات مشتركة بين متغيرين

مثال: الجدول المجاور يوضح أداء مجموعة من الأشخاص في فحص القيادة، ونريد إيجاد احتمال أن يكون الشخص ناجحًا علمًا أنه يأخذ حصصًا في تعلم القيادة نجد أن ..

	أخذ حصصًا	لم يأخذ حصصًا
ناجح A	48	64
راسب B	32	18

$$P(A|D)=\frac{48}{48+32}=\frac{48}{80}=\frac{3}{5}$$

احتمال النجاح والفشل

المقصود به	نسبة تقيس فرصة وقوع حادثة معينة إن كانت مرغوبة سميت نجاحًا وعدم وقوعها يسمى فشلاً
إيجاده	لوقوع حادثة: إذا كان عدد مرات النجاح s مرة، وعدد مرات الفشل f مرة فإن .. احتمال النجاح $P(S)$: $P(S) = \frac{s}{s+f}$ ، احتمال الفشل $P(F)$: $P(F) = \frac{f}{s+f}$
مثال توضيحي	رشحت مدرسة 3 طلاب من الصف الثاني الثانوي، 11 طالبًا من الصف الأول الثانوي وكان عدد الجوائز 4 ، واختير 4 طلاب من الذين رشحوا بطريقة عشوائية؛ ما احتمال أن يفوز طالبان من الصف الثاني وطالبان من الصف الأول؟ الخطوة1: نحدد عدد النجاحات باستعمال التوافيق .. اختيار طالبين من 3 طلاب مرشحين $3C_2$ ، واختيار طالبين من 11 طالبًا مرشحين $11C_2$ .. $\therefore$ s عدد النجاحات $s = 3C_2 \cdot 11C_2 = 165$ الخطوة : نحدد فضاء العينة $s+f$ .. $s + f = 14C_4 = 1001$ الخطوة3: نوجد احتمال أن يفوز طالبان من الصف الثاني وطالبان من الصف الأول .. $P(S) = \frac{s}{s+f} = \frac{165}{1001} \approx 0.16$

المتغير العشوائي

المقصود به	متغير يأخذ مجموعة قيم لها احتمالات معلومة
نوعاه	**متغير عشوائي منفصل**: تكون البيانات منفصلة؛ مثل مجموع العددين إذا أُلقي مكعبان **متغير عشوائي متصل**: تكون البيانات متصلة في فترة من الأعداد الحقيقية؛ مثل أطوال جميع أفراد عينة ما
مثال	في تجربة رمي مكعبين مرقمين متمايزين مرة واحدة .. • المتغير العشوائي X يُمثل مجموع العددين الظاهرين على المكعبين. • الجدول المجاور يُبين بعض قيم X المعينة لنواتج هذه التجربة.

مجموع نواتج رمي المكعبين المرقمين

النواتج	قيم X
(1,1)	2
(1,2)	3
(2,1)	3
⋮	⋮
(6,6)	12

التوزيع الاحتمالي المنفصل

المقصود به	جدول أو معادلة أو تمثيل بياني يربط بين كل قيمة من قيم المتغير العشوائي المنفصل X مع احتمال وقوعها
مثال	عند رمي قطعتي نقد متمايزتين مرة واحدة وكان X متغيراً عشوائيًا يدل على عدد مرات ظهور الشعار فيمكننا حساب الاحتمال لكل قيم $X = 0, 1, 2$ ..

عدد الشعارات X	0	1	2
الاحتمال $P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

تنبيهان:
- احتمال كل قيمة من X محصور بين 0 و 1 ؛ أي أن $0 \le P(X) \le 1$.
- مجموع كل احتمالات قيم X يساوي 1 ؛ أي أن $\sum P(X) = 1$.

القيمة المتوقعة

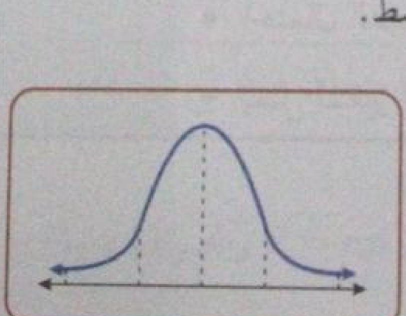
المقصود بها	معدل قيم المتغير العشوائي المتوقعة عند إعادة التجربة أو محاكاتها نظريًا عدداً لانهائيًا من المرات
حساب القيمة المتوقعة	لإيجاد القيمة المتوقعة $E(X)$ للمتغير العشوائي X نتبّع التالي: (١) نضرب قيمة X في احتمال حدوثها. (٢) نكرر الخطوة 1 لجميع قيم X الممكنة. (٣) نُوجد مجموع نواتج الضرب.
مثال	إيجاد القيمة المتوقعة $E(X)$ لقيم المتغير العشوائي X وقيم الاحتمال المناظرة له كما بالجدول المجاور ..

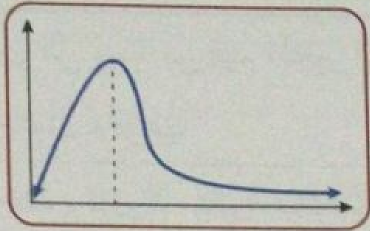
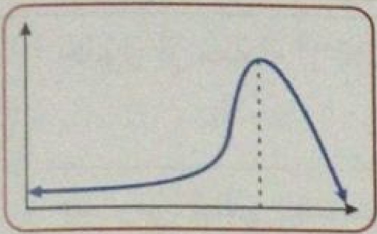
X	2	3	5
$P(X)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{12}$

$$E(X) = 2\left(\frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{12}\right) + 5\left(\frac{7}{12}\right) \approx 3.83$$

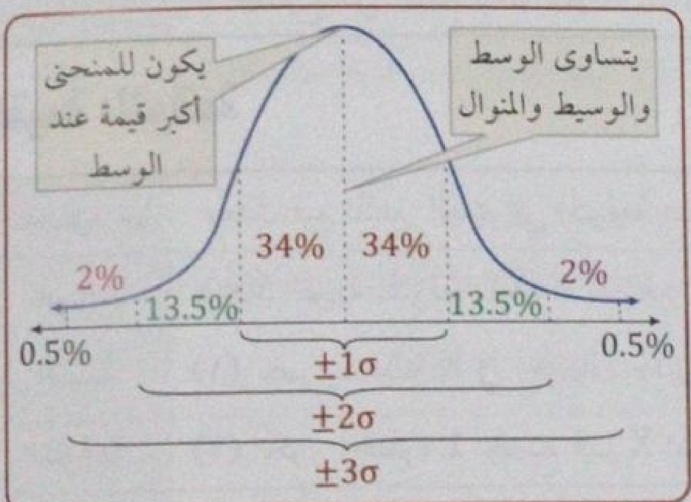
التوزيع الطبيعي

خصائصه:
- التمثيل البياني له منحنى يشبه الجرس ومتماثل بالنسبة للوسط.
- يتساوى الوسط والوسيط والمنوال وتقع في المركز.
- المساحة تحت المنحنى تساوي 1 أو 100% .
- يقترب المنحنى من المحور x ولكنه لا يمسه.
- المنحنى متصل.



التوزيعات الملتوية	التواء موجب « إلى اليمين »	التواء سالب « إلى اليسار »
		
	التوزيع مكثف في اليسار والذيل لليمين	التوزيع مكثف في اليمين والذيل لليسار

القانون التجريبي

وظيفته	يصف القانون التجريبي خصائص أخرى للتوزيع الطبيعي
الخصائص	يتصف التوزيع الطبيعي الذي وسطه μ وانحرافه المعياري σ بالخصائص التالية: • يقع 68% تقريبًا من البيانات ضمن الفترة $\mu - \sigma \, , \, \mu + \sigma$. • يقع 95% تقريبًا من البيانات ضمن الفترة $\mu - 2\sigma \, , \, \mu + 2\sigma$. • يقع 99% تقريبًا من البيانات ضمن الفترة $\mu - 3\sigma \, , \, \mu + 3\sigma$. 

توزيع ذات الحدين

المقصود به	كل تجربة يتم إجراءها لعدد من المحاولات n لها نتيجتان متوقعتان نجاح S أو فشل F
الشروط	• يعاد إجراء التجربة لعدد محدد من المحاولات المستقلة « المرات » n . • لكل محاولة نتيجتان متوقعتان نجاح S أو فشل F . • احتمال النجاح $P(S)$ أو p ، واحتمال الفشل $P(F)$ أو q ويساوي $1 - p$. • يُمثل المتغير العشوائي X عدد مرات النجاح في n من المحاولات

احتمال ذات الحدين

التعبير الرمزي	احتمال X نجاح من n من المحاولات المستقلة في تجربة ذات الحدين هو .. $$P(X) = {}_nC_x p^x q^{n-x}$$ حيث p احتمال النجاح و q احتمال الفشل في المحاولة الواحدة .
مثال	إيجاد $P(X = 3)$ في تجربة ذات حدين فيها $n = 5$, $p = 40\%$ .. $$q = 1 - p = 1 - 0.40 = 0.60$$ $$P(X = 3) = {}_nC_x\, p^x q^{n-x} = {}_5C_3\ (0.40)^3 (0.60)^{5-3} \approx\ 0.23$$
تنبيه	$${}_nC_x\ = \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x q^{n-x}$$

الوسط والتباين والانحراف المعياري

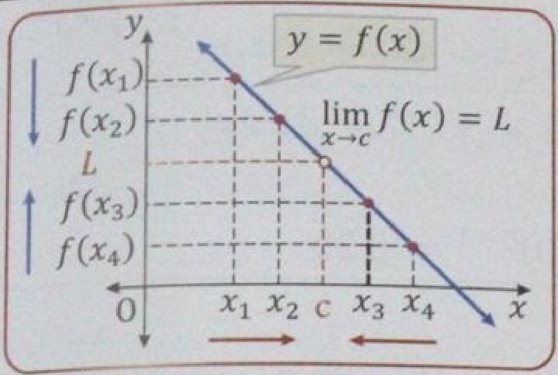
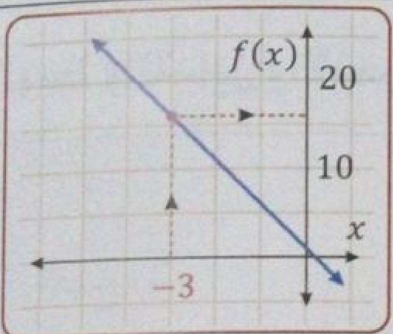
الصيغ	الوسط: $\mu = np$ التباين: $\sigma^2 = npq$ الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{npq}$	n عدد المحاولات p احتمال النجاح q احتمال الفشل
مثال	حساب الوسط والتباين والانحراف المعياري لتوزيع ذات الحدين الذي له البيانات التالية: $$n = 6\ ,\ p = 0.40$$ • الوسط: $\mu = np = 6 \times 0.40 = 2.40$. • التباين: $\sigma^2 = npq = 6 \times 0.40 \times (1 - 0.40) \approx 1.44$. • الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1.44} \approx 1.2$.	

تقريب توزيع ذات الحدين إلى التوزيع الطبيعي

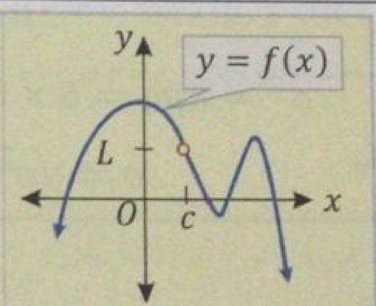
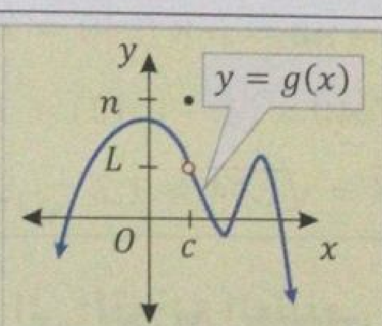
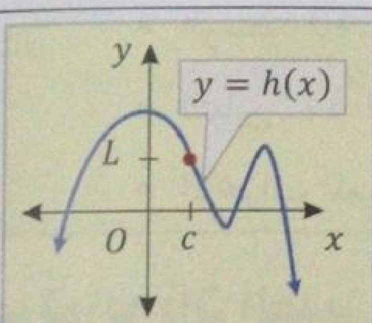
المقصود به	استعمال التوزيع الطبيعي لتقريب توزيع ذي الحدين عندما تزداد عدد المحاولات في التجربة العشوائية
التعبير الرمزي	• في توزيع ذات الحدين عندما تمثل n عدد المحاولات واحتمال النجاح p واحتمال الفشل q ويكون $np \geq 5\ ,\ nq \geq 5$. • يمكن تقريب توزيع ذات الحدين إلى توزيع طبيعي بوسط $\bar{x} = np$ وانحراف معياري $\sigma = \sqrt{npq}$.

الفصل ٤ : النهايات والاشتقاق

تقدير النهايات بيانيًا

المقصود به	تقدير النهاية عند قيمة محددة	
التقدير بيانيًا	إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L كلما اقتربت قيم x من العدد c من كلا الجهتين فإن نهاية $f(x)$ عندما x تقترب من c هي L وتُكتب على الصورة $\lim_{x \to c} f(x) = L$	
مثال توضيحي	قدِّر النهاية $\lim_{x \to -3} (1 - 5x)$ باستعمال التمثيل البياني. يُبين التمثيل البياني للدالة $f(x) = 1 - 5x$ أنه كلما اقتربت x من العدد 3− فإن قيم $f(x)$ المقابلة تقترب من العدد 16 .. $\therefore \quad \lim_{x \to -3} (1 - 5x) = 16$	

عدم اعتماد النهاية على قيمة الدالة عند نقطة

المقصود به	لا تعتمد نهاية $f(x)$ عندما x تقترب من العدد c على قيمة الدالة عند c		
أمثلة	 $\lim_{x \to c} f(x) = L$ و $f(c)$ غير معرفة	 $\lim_{x \to c} g(x) = L$ و $g(c) = n$	 $\lim_{x \to c} h(x) = L$ و $h(c) = L$

النهاية من جهة واحدة

المقصود بها	وصف سلوك التمثيل البياني لدالة النهاية عن يمين عدد أو يساره بمفرده
النهاية من اليمين	إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L_1 عند اقتراب قيم x من العدد c من اليمين فإن .. $\boxed{\lim_{x \to c^+} f(x) = L_1}$ **وتُقرأ:** نهاية $f(x)$ عندما تقترب قيم x من العدد c من اليمين تساوي L_1 .

النهاية من اليسار

إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L_2 عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار فإن ..

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L_2$$

وتُقرأ: نهاية $f(x)$ عندما تقترب قيم x من العدد c من اليسار تساوي L_2 .

النهاية من جهتين

المقصود بها

إيجاد النهاية عند نقطة

التعبير اللفظي

تكون نهاية $f(x)$ موجودة عندما تقترب x من c إذا وفقط إذا كانت النهايتان من اليمين واليسار موجودتين ومتساويتين

التعبير الرمزي

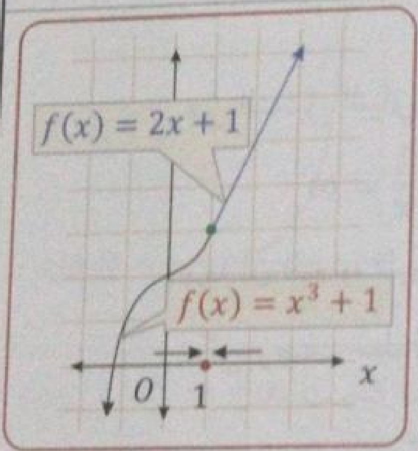
إذا كانت $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L$ فإن $\lim_{x \to c} f(x) = L$

مثال توضيحي 1

قـدِّر النـــهايات التاليـــة إذا كـــان لهـــا وجـــود:

$\lim_{x \to 1^-} f(x), \lim_{x \to 1^+} f(x), \lim_{x \to 1} f(x)$ ، حيث ..

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & , \quad x < 1 \\ 2x + 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$



يُبين التمثيل البياني المجاور للدالة $f(x)$ أن ..

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3$ ، $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3$

تنبيه

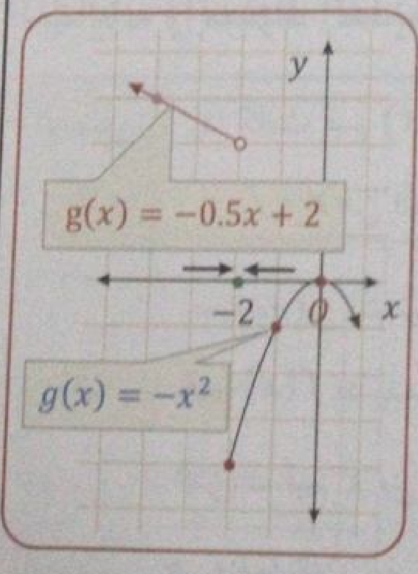
إذا كانت النهايتان من اليمين ومن اليسار غير متساويتين فإن $\lim_{x \to c} f(x)$ غير موجودة

مثال توضيحي 2

قـدِّر النـــهايات التاليـــة إن كـــان لهـــا وجـــود:

$\lim_{x \to -2^-} g(x), \lim_{x \to -2^+} g(x), \lim_{x \to -2} g(x)$ ، حيث:

$$g(x) = \begin{cases} -0.5x + 2 & , \quad x < -2 \\ -x^2 & , \quad x \geq -2 \end{cases}$$



يُبين التمثيل البياني المجاور للدالة $f(x)$ أن ..

$\lim_{x \to -2^-} g(x) = 3$ ، $\lim_{x \to -2^+} g(x) = -4$

وبما أن النهاية اليمنى لا تساوي النهاية اليسرى فإن ..

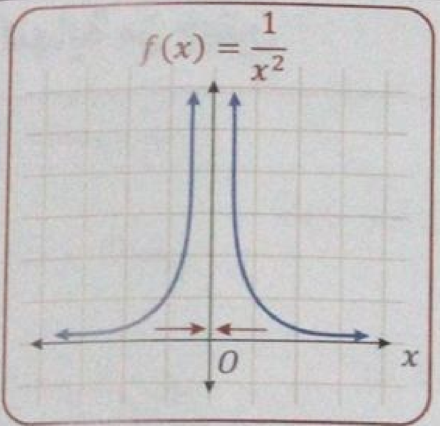
$\lim_{x \to -2} g(x)$ غير موجودة

النهايات والسلوك غير المحدد

المقصود بها

- إذا زادت قيم $f(x)$ بشكل غير محدود عند اقتراب x من العدد c فإن $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$.
- إذا نقصت قيم $f(x)$ بشكل غير محدود عند اقتراب x من العدد c فإن $\lim\limits_{x \to c} f(x) = -\infty$.

مثال1



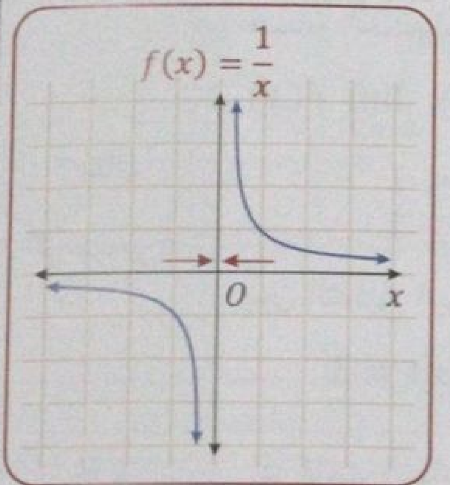
من التمثيل البياني المجاور للدالة $f(x) = \frac{1}{x^2}$ نجد أن ..

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty$$

يمكن وصف سلوك الدالة عندما $x = 0$ بعبارة واحدة ..

$$\therefore \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

مثال2



من التمثيل البياني المجاور للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ نجد أن ..

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

وبما أن النهاية اليمنى لا تساوي النهاية اليسرى فإنه لا يمكن وصف سلوك الدالة عندما $x = 0$ بعبارة واحدة ..

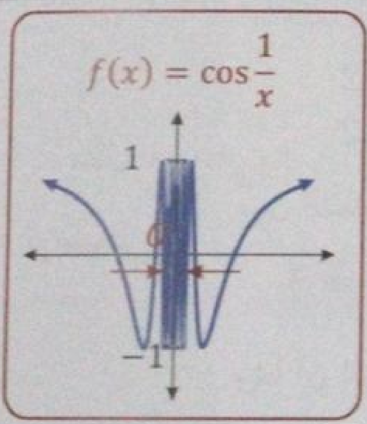
$\therefore \quad \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ غير موجودة

النهايات والسلوك التذبذبي

المقصود بها

إذا كانت قيم $f(x)$ تتذبذب بين قيمتين مختلفتين باقتراب قيم x من العدد c فإن $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ غير موجودة

مثال



نستنتج من التمثيل البياني المجاور للدالة $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ أن قيم $f(x)$ تتذبذب بشكل مستمر بين العددين 1 و −1 كلما اقتربت قيم x من العدد 0 ؛ أي أن $\lim\limits_{x \to 0} \cos\frac{1}{x}$ غير موجودة

أسباب عدم وجود نهاية عند نقطة

- عندما تقترب قيم $f(x)$ بين قيمتين مختلفتين باقتراب قيم x من العدد c من اليسار ومن اليمين.
- عندما تزداد قيم $f(x)$ أو تتناقص بشكل غير محدود عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار أو من اليمين أو كليهما.
- عندما تتذبذب قيم $f(x)$ بين قيمتين مختلفتين باقتراب قيم x من العدد c .

نهاية عند المالانهاية

المقصود بها

- إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L_1 عند ازدياد قيم x بشكل غير محدود فإن ..

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} f(x) = L_1}$$

تُقرأ: نهاية $f(x)$ عندما تقترب قيم x من موجب مالانهاية هي L_1 .

- إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L_2 عند نقصان قيم x بشكل غير محدود فإن ..

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = L_2}$$

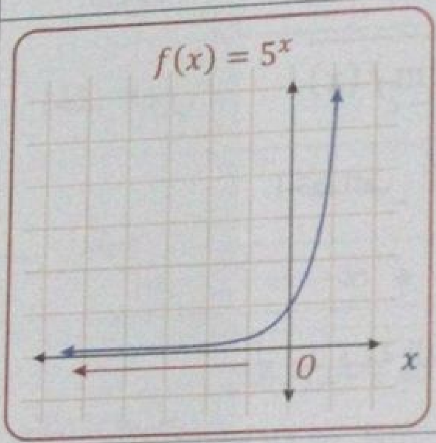
تُقرأ: نهاية $f(x)$ عندما تقترب قيم x من سالب مالانهاية هي L_2 .

مثال توضيحي 1

قدِّر النهاية $\lim_{x \to -\infty} 5^x$ إن كانت موجودة.

يُبيِّن التمثيل البياني المجاور للدالة $f(x) = 5^x$ أن ..

$$\lim_{x \to -\infty} 5^x = 0$$



تنبيهات

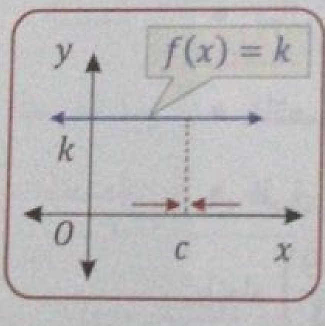
- المستقيم $x = c$ هو خط تقارب رأسي للدالة f إذا كانت $\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$ أو كليهما.
- المستقيم $y = c$ هو خط تقارب أفقي للدالة f إذا كانت $\lim_{x \to -\infty} f(x) = c$ أو $\lim_{x \to \infty} f(x) = c$.

نهايات الدوال

نهايات الدوال الثابتة

نهاية الدالة الثابتة عند أي نقطة c هي القيمة الثابتة للدالة، ويُرمز لها بالرمز ..

$$\boxed{\lim_{x \to c} k = k}$$



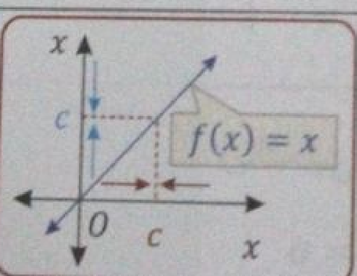
مثالان

$$\lim_{x \to 3} 7 = 7 \quad , \quad \lim_{x \to 4} -2 = -2$$

نهاية الدالة المحايدة

نهاية الدالة المحايدة عند أي نقطة c هي c ، ويرمز لها بالرمز ..

$$\boxed{\lim_{x \to c} x = c}$$



مثالان

$$\lim_{x \to 3} x = 3 \quad , \quad \lim_{x \to -4} x = -4$$

خصائص النهايات

المجموع	$\lim_{x \to c}[f(x)+g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$
الفرق	$\lim_{x \to c}[f(x)-g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$
الضرب في ثابت	$\lim_{x \to c}[kf(x)] = k\lim_{x \to c} f(x)$
الضرب	$\lim_{x \to c}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$
القسمة	$\lim_{x \to c}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$ ، حيث $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$
القوة	$\lim_{x \to c}[f(x)]^n = \left[\lim_{x \to c} f(x)\right]^n$
الجذر النوني	$\lim_{x \to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$ ، إذا كان $\lim_{x \to c} f(x) > 0$ عندما n زوجي
تنبيه	الخصائص السابقة صحيحة إذا كان c, k عددين حقيقيين وn عدداً صحيحاً موجباً وكانت $\lim_{x \to c} g(x)$ ، $\lim_{x \to c} f(x)$ موجودتين
مثال توضيحي	أوجد قيمة النهاية $\lim_{x \to 2}\frac{x-3}{2x^2-x-15}$. $\lim_{x \to 2}\left(\frac{x-3}{2x^2-x-15}\right) = \frac{2-3}{2(2)^2-2-15} = \frac{1}{9}$

نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية

نهايات دوال كثيرات الحدود	• **الطريقة:** بالتعويض المباشر. • مثال: $\lim_{x \to 4}(x^2-3) = 4^2 - 3 = 16 - 3 = 13$.
نهايات الدوال النسبية	• **الطريقة:** بالتعويض المباشر بشرط أن المقام ≠ صفراً عند النقطة التي تُحسب عندها النهاية. • مثال: $\lim_{x \to 2}\left(\frac{x-1}{x+5}\right) = \frac{2-1}{2+5} = \frac{1}{7}$.
الصيغة غير المحددة	• **المقصود بها:** الصيغة $\frac{0}{0}$ وتنتج من التعويض المباشر لبعض نهايات الدوال النسبية. • **طرق معالجتها:** التحليل واختصار العوامل المشتركة ، ضرب البسط والمقام في المرافق.
مثال	إيجاد $\lim_{x \to 3}\left(\frac{x^2-9}{x-3}\right)$ .. $\lim_{x \to 3}\left(\frac{x^2-9}{x-3}\right) = \frac{3^2-9}{3-3} = \frac{0}{0}$ الصيغة غير المحددة وبالتحليل واختصار العوامل المشتركة نحصل على .. $\lim_{x \to 3}\left(\frac{x^2-9}{x-3}\right) = \lim_{x \to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}} = \lim_{x \to 3}(x+3) = 3+3 = 6$

مثال توضيحي	احسب النهاية $\lim_{x\to 25}\frac{x-25}{\sqrt{x}-5}$. بالتعويض المباشر نحصل على .. الصيغة غير المحددة $\lim_{x\to 25}\frac{x-25}{\sqrt{x}-5}=\frac{25-25}{\sqrt{25}-5}=\frac{0}{0}$ وبالضرب في المرافق واختصار العوامل المشتركة .. $\lim_{x\to 25}\frac{x-25}{\sqrt{x}-5}\cdot\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+5}=\lim_{x\to 25}\frac{\cancel{(x-25)}(\sqrt{x}+5)}{\cancel{(x-25)}}=\sqrt{25}+5=\boxed{10}$

نهاية الدوال عند المالانهاية

نهايات دوال القوى	لأي عدد صحيح موجب n .. • $\lim_{x\to\infty}x^n=\infty$ • $\lim_{x\to-\infty}x^n=\infty$ ، إذا كانت n زوجي. • $\lim_{x\to-\infty}x^n=-\infty$ ، إذا كانت n فردي.
أمثلة	• $\lim_{x\to\infty}x^7=\infty$. • $\lim_{x\to-\infty}x^2=\infty$. • $\lim_{x\to-\infty}x^5=-\infty$.
نهايات دوال كثيرات الحدود	إذا كانت $p(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ دالة كثيرة حدود فإن .. $\lim_{x\to\infty}p(x)=\lim_{x\to\infty}a_nx^n,\ \lim_{x\to-\infty}p(x)=\lim_{x\to-\infty}a_nx^n$
مثال	$\lim_{x\to-\infty}(x^3-2x^2+5x-1)=\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty$
دالة المقلوب	• **المقصود بها:** الدالة $f(x)=\frac{1}{a(x)}$ تسمى دالة المقلوب، حيث $a(x)$ دالة خطية لا تساوي الصفر. • **نهايتها:** $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$. • **نتيجة:** $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n}=0$ ؛ لأي عدد صحيح موجب n .
نهاية الدالة النسبية $p(x)$	• **الطريقة:** نقسم كل حد في بسط ومقام الدالة النسبية على x لأعلى قوة والتبسيط باستخدام نهاية دالة المقلوب عند المالانهاية. • **مثال:** نُوجد $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}$ بقسمة كل حد على x لأعلى قوة « x^2 » كالتالي: $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{0}{1+(0)^2}=0$

المماس والسرعة المتجهة

معدل التغير اللحظي	معدل التغير اللحظي للدالة f عند النقطة $(x, f(x))$ هو ميل المماس عند هذه النقطة، ويُعطى بالصيغة .. $$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ بشرط وجود النهاية.
السرعة المتوسطة المتجهة	إذا أُعطي موقع جسم متحرك بوصفه دالة في الزمن $f(x)$ فإن السرعة المتوسطة المتجهة للجسم v_{avg} في الفترة الزمنية من a إلى b يُعطى بالصيغة .. $$v_{\text{avg}} = \frac{\text{التغير في المسافة}}{\text{التغير في الزمن}} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
مثال توضيحي	تُمثل $h(t) = 5 + 65t - 16t^2$ الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لبالون يصعد رأسيًا؛ ما السرعة المتوسطة المتجهة للبالون بين $t = 1\text{ s}$, $t = 2\text{ s}$ ؟ نُوجد الارتفاع عند $t = 1\text{ s}$ و $t = 2\text{ s}$ بالتعويض في $h(t) = 5 + 65t - 16t^2$ .. $$h(1) = 5 + 65(1) - 16(1)^2 = 54$$ $$h(2) = 5 + 65(2) - 16(2)^2 = 71$$ نُوجد ـ الآن ـ السرعة المتوسطة المتجهة للبالون .. $$v_{\text{avg}} = \frac{h(b)-h(a)}{b-a} = \frac{h(2)-h(1)}{2-1} = \frac{71-54}{1} = 17$$ ∴ السرعة المتوسطة المتجهة للبالون هي 17 ft/s لأعلى
السرعة المتجهة اللحظية	إذا أُعطيت المسافة التي يقطعها جسم على صورة $f(t)$ بدلالة الزمن t فإن السرعة اللحظية $v(t)$ لذلك الجسم عند الزمن t تُعطى بالصيغة .. $$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$ بشرط وجود النهاية.
تنبيهان	• السرعة المتوسطة المتجهة تكون خلال **فترة** زمنية محددة « بداية ونهاية ». • السرعة المتجهة اللحظية تكون عند **لحظة** زمنية محددة.
إشارة السرعة المتجهة	+ : تكون السرعة للأمام أو لأعلى − : تكون السرعة للخلف أو لأسفل

قواعد أساسية في الاشتقاق

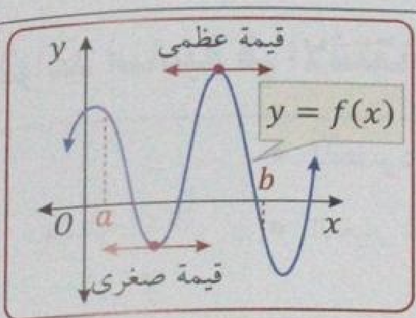
مشتقة الدالة $f(x)$	• المقصود بها: ميل مماس منحنى الدالة $f(x)$ عند أي نقطة عليه. • التعبير الرمزي: يُرمز لها بالرمز $f'(x)$ وتُعطى بالصيغة .. $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ بشرط وجود النهاية.
مشتقة القوة	إذا كانت $f(x) = x^n$ فإن .. $f'(x) = nx^{n-1}$
مثالان	• $f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$. • $f(x) = x^{-3} \Rightarrow f'(x) = -3x^{-3-1} = -3x^{-4}$.
مشتقة الثابت	إذا كانت $f(x) = c$ حيث c عدد ثابت فإن .. $f'(x) = 0$
مشتقة مضاعفات القوة	إذا كانت $f(x) = cx^n$ فإن .. $f'(x) = ncx^{n-1}$
فائدة	$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ و $f(x) = cx \Rightarrow f'(x) = c$
مشتقة المجموع أو الفرق	إذا كانت $f(x) = g(x) \pm h(x)$ فإن .. $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
مثال	إذا كانت $f(x) = x^3 + 5x^{-4}$ فإن .. $f'(x) = 3x^{3-1} + (-4)5x^{-4-1} = 3x^2 - 20x^{-5}$
مثال توضيحي	أوجد مشتقة الدالة $h(x) = \frac{4x^4-3x^2+5x}{x}$. أولاً: نُبسط $h(x)$ .. $h(x) = \frac{4x^4-3x^2+5x}{x} = \frac{4x^4}{x} - \frac{3x^2}{x} + \frac{5x}{x} = 4x^3 - 3x + 5$ ثانيًا: نُوجد ـ الآن ـ مشتقة الدالة $h(x) = 4x^3 - 3x + 5$ .. $h'(x) = 3(4x^{3-1}) + 3x^{1-1} + 0 = 12x^2 - 3$

نظرية القيمة القصوى

النقطة الحرجة	النقطة التي تكون عندها المشتقة تساوي الصفر أو غير معرفة
فائدتان	• قد تُشير النقطة الحرجة لوجود نقطة قيمة عظمى أو صغرى للدالة. • ميل المماس عند النقطة الحرجة يساوي صفر « يوازي محور x » أو غير معرف.

نظرية القيمة القصوى

إذا كانت $f(x)$ متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ فإن لها قيمة عظمى وصغرى على الفترة $[a,b]$، وذلك إما عند طرفي الفترة أو عند إحدى النقاط الحرجة



قاعدتا مشتقة الضرب والقسمة

مشتقة الضرب

إذا كانت مشتقة كلٍ من f, g موجودة عند x فإن ..

$$\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

مثال توضيحي1

أوجد مشتقة الدالة $h(x) = (x^5 + 13x^2)(7x^3 - 5x^2 + 18)$.

نُوجد المشتقة $h'(t)$ باستعمال مشتقة ضرب دالتين ..

$$h'(x) = \left[\frac{d}{dx}(x^5 + 13x^2)\right]\cdot(7x^3 - 5x^2 + 18) + (x^5 + 13x^2)\cdot\frac{d}{dx}[7x^3 - 5x^2 + 18]$$

$$= [5x^4 + 26x]\cdot(7x^3 - 5x^2 + 18) + (x^5 + 13x^2)\cdot[21x^2 - 10x]$$

مشتقة القسمة

إذا كانت مشتقة كلٍ من f, g موجودة عند x و $g(x) \neq 0$ فإن ..

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

مثال توضيحي2

أوجد مشتقة الدالة $j(x) = \frac{7x-10}{12x+5}$.

نُوجد المشتقة $j'(x)$ باستعمال مشتقة قسمة دالتين ..

$$j'(x) = \frac{\left[\frac{d}{dx}(7x-10)\right]\cdot(12x+5) - (7x-10)\cdot\left[\frac{d}{dx}(12x+5)\right]}{[12x+5]^2}$$

$$= \frac{[7]\cdot(12x+5) - (7x-10)\cdot[12]}{[12x+5]^2} = \frac{84x + 35 - 84x + 120}{[12x+5]^2}$$

$$= \frac{155}{[12x+5]^2}$$

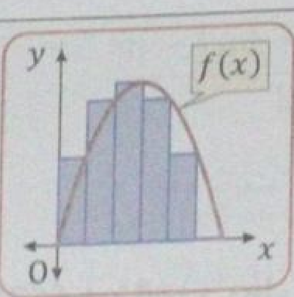
المساحة تحت منحنى باستعمال مستطيلات

المقصود بها

تقريب مساحة شكل غير منتظم « المنطقة المحصورة بين منحنى دالة ومحور x » باستعمال مستطيلات متساوية العرض

مثال

نحسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ ومحور x بتقسيم هذه المنطقة لمستطيلات متساوية العرض وإيجاد مساحة كل مستطيل فتكون المساحة التقريبية للمنطقة تساوي مجموع مساحات هذه المستطيلات



تذكر

مساحة المستطيل = طول القاعدة × الارتفاع

التجزيء المنتظم

المقصود به

تقسيم الفترة من a إلى b لفترات جزئية متساوية الطول

طول الفترة الجزئية

إذا تم تجزئة الفترة من a إلى b تجزيئًا منتظمًا لفترات جزئية عددها n فإن ..

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

حيث: Δx طول الفترة الجزئية و a بداية الفترة و b نهاية الفترة.

المساحة باستعمال التجزيء المنتظم

المقصود بها

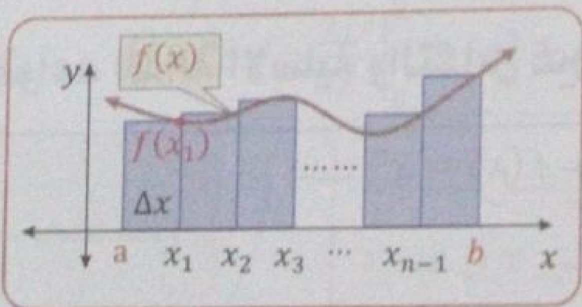
حساب مجموع مساحات المستطيلات التي عرضها Δx وارتفاعاتها $f(x_i)$

التعبير الرمزي

تُعطى المساحة الكلية للمنطقة A بالصيغة ..

$$A \text{ المساحة} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

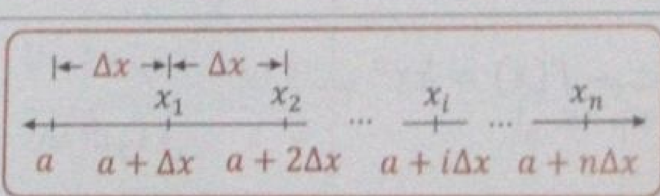
حيث: n عدد المستطيلات و x_i الطرف الأيمن للمستطيل الذي ارتفاعه $f(x_i)$.



إيجاد x_i

تُعطى x_i بالصيغة ..

$$x_i = a + i\Delta x$$



حيث: a بداية الفترة و Δx طول الفترة الجزئية.

صيغ المجاميع

$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$	$\sum_{i=1}^{n} c = cn$; c عدد ثابت
$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$	$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

$\sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{2n^6+6n^5+5n^4-n^2}{12}$	$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{i=1}^{n} ci = c\sum_{i=1}^{n} i$; c عدد ثابت	$\sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$

التكامل المحدد بطريقة مجموع ريمان الأيمن

التعبير اللفظي	نهاية مجموع مساحات المستطيلات عندما يقترب عرض كل مستطيل من الصفر
التعبير الرمزي	مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ والمحور x في الفترة $[a, b]$ .. $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x}$ حيث: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ و $x_i = a + i\Delta x$.

الدوال الأصلية

المقصود بها	الدالة $F(x)$ تسمى دالة أصلية للدالة $f(x)$ إذا كانت $F'(x) = f(x)$
مثال	الدالة $F(x) = x^3$ هي دالة أصلية للدالة $f(x) = 3x^2$ لأن .. $F'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2 = f(x)$

قواعد الدالة الأصلية والتكامل غير المحدد

قاعدة القوة	إذا كانت $f(x) = x^n$ حيث n عدد نسبي لا يساوي -1 فإن .. $\boxed{F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}$
قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت	إذا كانت $f(x) = kx^n$ حيث n عدد نسبي لا يساوي -1 و k عدداً ثابتاً فإن .. $\boxed{F(x) = \frac{kx^{n+1}}{n+1} + C}$
فائدة	إذا كانت $f(x) = k$ حيث k عدداً ثابتاً فإن دالتها الأصلية هي $F(x) = kx + C$
مثال	إذا كانت $f(x) = 5x^4$ فإن .. $F(x) = \frac{5x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{\cancel{5}x^5}{\cancel{5}} + C = x^5 + C$
قاعدة المجموع والفرق	إذا كان لـ $f(x), g(x)$ دالتان أصليتان هما $F(x), G(x)$ على الترتيب فإن .. $G(x) \pm F(x)$ دالة أصلية لـ $g(x) \pm f(x)$

مثال توضيحي

أوجد جميع الدوال الأصلية $f(x) = 8x^7 + 6x + 2$.

نكتب الدالة $f(x) = 8x^7 + 6x + 2$ بدلالة قوى x ..

$$f(x) = 8x^7 + 6x^1 + 2x^0$$

نوجد ـ الآن ـ جميع الدوال الأصلية للدالة $f(x) = 8x^7 + 6x^1 + 2x^0$ ..

$$F(x) = \frac{8x^{7+1}}{7+1} + \frac{6x^{1+1}}{1+1} + \frac{2x^{0+1}}{0+1} + C = \frac{8x^8}{8} + \frac{6x^2}{2} + \frac{2x^1}{1} + C$$
$$= x^8 + 3x^2 + 2x + C$$

التكامل غير المحدد

يُعطى التكامل غير المحدد للدالة f بالصيغة ..

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C}$$

حيث: $F(x)$ دالة أصلية لـ $f(x)$ و C ثابت.

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

المقصود بها

إذا كانت $F(x)$ دالة أصلية للدالة المتصلة $f(x)$ فإن ..

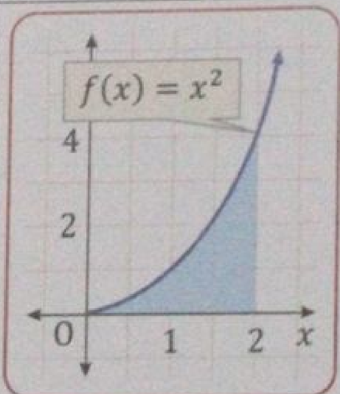
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

مثال1

إيجاد التكامل المحدد $\int_0^3 2x\,dx$ ..

$$\int_0^3 2x\,dx = \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}}\Big|_0^3 = (x^2 + C)\Big|_0^3 = (3^2 + C) - (0^2 + C) = 9$$

مثال2



حساب مساحة المنطقة المظللة بالشكل المجاور التي تمثل المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2$ ومحور x في الفترة $[0,2]$ ..

$$\int_0^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$$ وحدة مساحة

مثال توضيحي

احسب التكامل المحدد $\int_1^2 (16x^3 - 6x^2)\,dx$.

$$\int_1^2 (16x^3 - 6x^2)\,dx = \left(\frac{\overset{4}{\cancel{16}}x^4}{\cancel{4}} - \frac{\overset{2}{\cancel{6}}x^3}{\cancel{3}}\right)\Bigg|_1^2$$
$$= (4x^4 - 2x^3)\Big|_1^2$$
$$= [4(2)^4 - 2(2)^3] - [4(1)^4 - 2(1)^3]$$
$$= [64 - 16] - [4 - 2] = 117$$